

## *Análise de escoamento em condutos forçados. Uso das equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White.*

Eng. Luiz A. Camargo (\*)

Neste texto, interessa-nos mostrar os aspectos práticos que envolvem a análise do escoamento de fluidos incompressíveis em condutos forçados, uniformes e de seção circular, em regime permanente. Esta reunião de condições representa a maioria das situações com as quais uma grande parte dos projetistas de hidráulica se defronta no seu dia-a-dia. Por esta razão é que este tema é aqui apresentado. Contudo, não tem o presente trabalho a intenção de esgotar o assunto, e nem de apresentar, questionar ou demonstrar teorias hidráulicas, pois isto já é amplamente tratado na literatura corrente sobre o assunto, mas sim mostrar tópicos práticos relevantes sobre o dimensionamento hidráulico de condutos forçados. Aqueles que desejarem se aprofundar mais no assunto, poderão consultar as referências indicadas no final do texto.

Entende-se por conduto forçado àquele no qual o fluido escoar à plena seção e sob pressão. Os condutos de seção circular são chamados de tubos ou tubulações. Um conduto é dito uniforme quando a sua seção transversal não varia com o seu comprimento. Se a velocidade do fluido em qualquer seção do conduto não variar com o tempo, o regime de escoamento é dito permanente.

A densidade dos líquidos, ao contrário do que se passa com os gases, varia muito pouco quando se varia a sua pressão ou temperatura. A título de exemplo, considerando que a água tem compressibilidade igual a  $5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{Kgf}$ , isto significa que em condições normais seria necessário um incremento de pressão de  $20 \text{ Kgf/cm}^2$  para que um litro de água se reduza de  $1 \text{ cm}^3$ , ou seja, para que sua densidade aumente um milésimo. Por isto, do ponto de vista prático, a densidade da água e de qualquer líquido é independente da temperatura e da pressão. Diante dessa reduzidíssima variação da densidade, nos escoamentos de líquidos em regime permanente considera-se que os mesmos se comportam como incompressíveis. Neste contexto se incluem querosene, gasolina, álcool, óleo diesel, água, vinho, vinhoto, leite, etc.

Como este trabalho tratará de um tema da engenharia relacionado especificamente à hidráulica de tubulações, e alguns de seus aspectos dimensionais, pode-se iniciá-lo apresentando a equação da continuidade em sua forma mais comum:

$$Q = AV \tag{1}$$

onde:

$Q$  = vazão no tubo ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$A = \pi \cdot D^2/4$  = área da seção transversal do tubo ( $\text{m}^2$ )

$D$  = diâmetro interno do tubo (m)

$V$  = velocidade do líquido no interior do tubo (m/s)

É conveniente ressaltar que um escoamento se classifica também como turbulento ou laminar. No escoamento laminar há um caminhar disciplinado das partículas fluidas, seguindo trajetórias regulares, sendo que as trajetórias de duas partículas vizinhas não se cruzam. Já no escoamento turbulento a velocidade num dado ponto varia constantemente em grandeza e direção, com trajetórias irregulares, e podendo uma mesma partícula ora localizar-se próxima do eixo do tubo, ora próxima da parede do tubo.

O critério para determinar se o escoamento é turbulento ou laminar, é a utilização do número de Reynolds:

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \tag{2}$$

Substituindo a Eq. 1 na Eq. 2, o número de Reynolds assume a conveniente forma:

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D \nu} \tag{3}$$

onde:

$R_e$  = número de Reynolds (adimensional)

$V$  = velocidade do líquido no interior do tubo (m/s)

$D$  = diâmetro interno do tubo (m)

$Q$  = vazão no tubo ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$\nu$  = viscosidade cinemática do líquido ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

Nas condições normais de escoamento o número de Reynolds é interpretado conforme segue:

$Re > 4000$ , então o escoamento é turbulento.

$Re < 2000$ , então o escoamento é laminar.

Entre estes dois valores há a zona de transição, onde não se pode determinar com precisão os elementos do dimensionamento.

As equações que aqui são utilizadas se aplicam ao chamado escoamento turbulento. Em geral, o regime de escoamento na condução de líquidos no interior de tubulações é turbulento, exceto em situações especiais, tais como escoamento a baixíssimas vazões, como ocorre em gotejadores de irrigação, onde o escoamento é laminar.

Sempre que um líquido escoar no interior de um tubo de um ponto para outro, haverá uma certa perda de energia, denominada perda de pressão ou perda de carga. Esta perda de energia é devido ao atrito com as paredes do tubo e devido à viscosidade do líquido em escoamento. Quanto maior for a rugosidade da parede da tubulação, isto é, a altura das asperezas, maior será a turbulência do escoamento e, logo, maior será a perda de carga.

Já há cerca de dois séculos estudos e pesquisas vem sendo realizados, procurando estabelecer leis que possam reger as perdas de carga em condutos. Várias fórmulas empíricas foram estabelecidas no passado e algumas empregadas até com alguma confiança em diversas aplicações de engenharia, como as fórmulas de Hazen-Williams, de Manning e de Flamant. Mas, trabalhos de diversos investigadores tem mostrado que, em sua totalidade, são mais ou menos incorretas. A incorreção dessas fórmulas é tanto maior quanto mais amplo é o domínio de aplicação pretendido por seus autores.

Atualmente a expressão mais precisa e usada universalmente para análise de escoamento em tubos, que foi proposta em 1845, é a conhecida equação de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad (4)$$

que, após substituir valores e realizar operações, também assume uma conveniente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \sqrt{\frac{8Q^2}{J\pi^2 gD^5}} \quad (5)$$

onde:

$h_f$  = perda de carga ao longo do comprimento do tubo (mca)

$f$  = fator de atrito (adimensional)

$L$  = comprimento do tubo (m)

$V$  = velocidade do líquido no interior do tubo (m/s)

$D$  = diâmetro interno do tubo (m)

$g$  = aceleração da gravidade local (m/s<sup>2</sup>)

$J$  =  $h_f / L$  = perda de carga unitária (mca/m)

Mas somente em 1939, quase 100 anos depois, é que se estabeleceu definitivamente o fator de atrito  $f$ , através da equação de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (6)$$

onde:

$f$  = fator de atrito (adimensional)

$k$  = rugosidade equivalente da parede do tubo (m)

$D$  = diâmetro interno do tubo (m)

$Re$  = número de Reynolds (adimensional)

Obviamente, trata-se de uma equação implícita, isto é, a variável  $f$  aparece nos dois membros da equação, de forma não ser possível explicitá-la. Mas isto não sugere que seja impossível resolver equações implícitas. Os métodos numéricos, embora aproximativos, são capazes de resolver equações implícitas com a precisão que se desejar. São métodos basicamente computacionais pois incorrem em operações matemáticas repetidas seguidamente. Encontram, contudo, muita utilidade em hidráulica.

É o caso dos métodos iterativos, nos quais ordena-se adequadamente a equação, e arbitra-se um valor inicial qualquer para a variável procurada que está no seu segundo membro. Com o valor inicial já arbitrado, calcula-se um novo valor para esta mesma variável procurada, mas para a que está no primeiro membro. Se a diferença entre o valor inicial e o novo valor calculado estiver fora da precisão desejada, repete-se esta operação, porém colocando como valor inicial o novo valor calculado. Se a diferença aumentar diz-se que os valores estão divergindo, e se diminuir diz-se que os valores estão convergindo para a solução. O número de repetições, isto é, o número de iterações poderá ser pequeno ou não, dependendo do método a ser utilizado, e se sucederá até que a diferença seja suficientemente pequena ou compatível com a precisão desejada. É uma técnica manual, cuja solução se torna trabalhosa e enfadonha. Mas com o uso de programas para computadores, tal como o HidroTec Calculador, a resolução torna-se simples, automática e rápida. Num esquema básico de cálculo, passo-a-passo, seria algo do tipo:

- 1- Arbitra-se um valor inicial qualquer para a variável do segundo membro.
- 2- Calcula-se novo valor para a mesma variável que está no primeiro membro.
- 3- Compara-se a diferença entre o valor calculado e o valor inicial com a tolerância estabelecida.
- 4- Se maior, o novo valor passa a ser o valor inicial, e volta-se para o passo (2). Se menor passa-se para o passo (5).
- 5- O corrente valor da variável é o valor procurado.

Métodos iterativos como o de Newton são muito potentes e convergem muito rapidamente, podendo alcançar resultados altamente precisos com duas ou três iterações. Mas não serão aqui mostrados, pois requerem outros conhecimentos que nos tirariam do rumo aqui almejado. Neste texto se pretende mostrar em linguagem simples, como resolver a equação implícita de Colebrook em simultaneidade com a equação de Darcy, a equação da continuidade e o número de Reynolds, empregando um método iterativo simples, fácil e capaz de convergir com razoável rapidez quando aplicado a estas equações.

Na prática, em nosso dia-a-dia, em termos específicos, sempre nos deparamos com as três situações a seguir, que nos levam a calcular:

- 1) o diâmetro
- 2) a vazão (ou velocidade)
- 3) a perda de carga

Estas são em síntese, as três variáveis principais envolvidas no cálculo hidráulico, pois as demais (material do tubo, tipo de líquido, temperatura, etc), são básicas. Por qualquer método que viermos a empregar, para se determinar qualquer uma dessas três variáveis, as duas demais deverão ser conhecidas.

Então, substituindo-se as equações 3 e 5 na equação 6 e realizando operações, tem-se:

$$D_{n+1} = \frac{0,7267Q^{0,4}}{(Jg)^{0,2}} \cdot \left[ -\log_{10} \left( 0,27 \frac{k}{D_n} + \frac{1,7748 \cdot v}{\sqrt{JgD_n^3}} \right) \right]^{-0,4} \quad (7)$$

$$Q = -2,2214 \sqrt{JgD^5} \cdot \log_{10} \left( 0,27 \frac{k}{D} + \frac{1,7748 \cdot v}{\sqrt{JgD^3}} \right) \quad (8)$$

$$J_{n+1} = \frac{0,2026Q^2}{D^5 g} \cdot \left[ -\log_{10} \left( 0,27 \frac{k}{D} + \frac{1,7748 \cdot v}{\sqrt{D^3 g J_n}} \right) \right]^{-2} \quad (9)$$

Como já dito anteriormente:

$D$  = diâmetro interno do tubo (m)

$Q$  = vazão no tubo ( $m^3/s$ )

$J = h_f / L$  = perda de carga unitária (mca/m)

$k$  = rugosidade equivalente da parede do tubo (m) - ver tabela adiante.

$\nu$  = viscosidade cinemática do líquido ( $m^2/s$ ) - ver tabela adiante.

$g$  = aceleração da gravidade local ( $m/s^2$ )

Com isto passa-se a dispor do conjunto de equações que melhor se aplica a análise, ao cálculo e ao dimensionamento hidráulico de condutos forçados, uniformes, de seção circular, com qualquer diâmetro e comprimento, em regime permanente, para fluidos incompressíveis.

Ao invés de se calcular primeiramente o valor de  $f$ , estas equações possibilitam calcular logo diretamente os valores do diâmetro  $D$ , da vazão  $Q$  e da perda de carga unitária  $J$ , respectivamente. Note-se que a equação 8 é explícita. Já as equações 7 e 9 são implícitas e por isto, para facilitar a resolução, as variáveis recebem o índice "n", que indica um valor qualquer, ou inicial, e o índice "n+1", que indica o valor imediatamente subsequente. Em suma: atribui-se valor para a variável com índice "n" e calcula-se o valor da variável com índice "n+1", repetindo-se este procedimento até alcançar a precisão desejada. Os exemplos a seguir ilustram bem o uso desta técnica.

## Estudo de casos

Caso 1:

Um conduto cilíndrico, de ferro fundido com cimento centrifugado, comprimento 360 m, rugosidade equivalente de  $10^{-4}$  m, conduz água à temperatura de 20 °C ( $\nu = 10^{-6}$   $m^2/s$ ), com vazão de 12  $m^3/s$  e sob a diferença de carga piezométrica nas seções extremas de 3,9 m. Pede-se o diâmetro.

Dados do problema:

$\nu = 0,000001$   $m^2/s$

$k = 0,0001$  m

$Q = 12$   $m^3/s$

$h_f = 3,9$  mca

$L = 360$  m

$J = h_f / L = 0,0108333$  mca/m

$g = 9,81$   $m/s^2$

Para determinar o diâmetro utiliza-se a equação 7:

$$D_{n+1} = \frac{0,7267 \cdot 12^{0,4}}{(0,010833 \cdot 9,81)^{0,2}} \cdot \left[ -\log_{10} \left( 0,27 \frac{0,0001}{D_n} + \frac{1,7748 \cdot 0,000001}{\sqrt{0,010833 \cdot 9,81 \cdot D_n^3}} \right) \right]^{-0,4}$$

$$D_{n+1} = 3,074284 \cdot [-\log_{10}(0,000027 \cdot D_n^{-1} + 0,000005444 \cdot D_n^{-1,5})]^{-0,4}$$

Será usada neste exemplo a precisão de 4 casas decimais, ou seja, o valor encontrado será dado como aceito quando o erro for na ordem de  $10^{-4}$ , isto é, 10 milésimos, ou 0,01%. Como valor inicial será adotado  $D = 1$ .

Então:

Como valor inicial tem-se  $D_0 = 1,0000$

Iteração 1: com  $D_0 = 1,0000$  tem-se  $D_1 = 1,6861$  (isto é,  $D_n = 1,0000$  resulta em  $D_{n+1} = 1,6861$ )

Iteração 2: com  $D_1 = 1,6861$  tem-se  $D_2 = 1,6508$

Iteração 3: com  $D_2 = 1,6508$  tem-se  $D_3 = 1,6521$

Iteração 4: com  $D_3 = 1,6521$  tem-se  $D_4 = 1,6521$

Neste ponto o cálculo pode ser interrompido já que  $D_4$  é igual a  $D_3$ . Isto significa que para esta tolerância o valor procurado já convergiu na terceira iteração. Logo, como resposta tem-se  $D = 1,6521$  m.

Cálculo com o HidroTec Calculador:

- Seleciona-se o material da tubulação: ferro fundido com cimento centrifugado
- Seleciona-se o líquido: água
- Seleciona-se a temperatura: 20 °C
- Seleciona-se "Diâmetro interno" para calcular
- Entra-se com a vazão = 12 m<sup>3</sup>/s
- Entra-se com a perda unitária = 0.01083333 mca/m
- Saída: diâmetro interno  $D = 1,6526$  m; e mais:  $f = 0,0112$ ,  $R_e = 8784901$  e  $V = 5,592$  m/s.

Caso 2:

Num conduto cilíndrico de fibrocimento de comprimento igual a 100 m, de diâmetro igual a 0,20 m e de rugosidade equivalente uniforme de  $10^{-4}$  m, está escoando água à temperatura de 20 °C ( $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s) com a vazão de 62,8 litros/s. Pede-se a perda de carga.

Dados do problema:

$$\begin{aligned}v &= 0,000001 \text{ m}^2/\text{s} \\k &= 0,0001 \text{ m} \\D &= 0,20 \text{ m} \\Q &= 0,0628 \text{ m}^3/\text{s} \\L &= 100 \text{ m} \\g &= 9,81 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Para determinar a perda de carga, utiliza-se a equação 9:

$$J_{n+1} = \frac{0,2026 \cdot 0,0628^2}{0,20^5 \cdot 9,81} \cdot \left[ -\log_{10} \left( 0,27 \frac{0,0001}{0,20} + \frac{1,7748 \cdot 0,000001}{\sqrt{0,20^3 \cdot 9,81 \cdot J_n}} \right) \right]^{-2}$$

$$J_{n+1} = 0,25453 \cdot [-\log_{10} (0,000135 + 0,000006335 \cdot J_n^{-0,5})]^{-2}$$

Neste exemplo também será usada a precisão de 4 casas decimais, ou seja, o valor encontrado será considerado como aceito quando o erro for na ordem de  $10^{-4}$ , isto é, 10 milésimos, ou 0,01%. Como valor inicial será adotado  $J = 1$ .

Então:

Como valor inicial tem-se  $J_0 = 1,0000$   
Iteração 1: com  $J_0 = 1,0000$  tem-se  $J_1 = 0,0185$   
Iteração 2: com  $J_1 = 0,0185$  tem-se  $J_2 = 0,0182$   
Iteração 3: com  $J_2 = 0,0182$  tem-se  $J_3 = 0,0182$

Aqui podemos interromper o cálculo pois, como se pode ver,  $J_3$  é igual a  $J_2$ , o que significa que para esta tolerância o valor procurado convergiu com duas iterações. Logo, como resposta tem-se  $J = 0,0182$  mca/m.

Cálculo com o HidroTec Calculador:

- Seleciona-se o material da tubulação: fibrocimento
- Seleciona-se o líquido: água
- Seleciona-se a temperatura: 20 °C
- Seleciona-se "Perda unitária" para calcular
- Entra-se com a vazão = 0.0628 m<sup>3</sup>/s
- Entra-se com o diâmetro interno = 0.20 m
- Saída: perda unitária  $J = 0,01826$  mca/m; e mais:  $f = 0,0179$ ,  $R_e = 379906$  e  $V = 0,1998$  m/s.

Nota: o cálculo aqui feito foi da perda unitária. Para encontrar a perda total basta multiplicar a perda unitária pelo comprimento, isto é,  $h_f = J \cdot L = 0,01826 \times 100 = 18,26$  mca.

### Caso 3:

Num conduto cilíndrico longo de concreto alisado centrifugado de diâmetro igual a 0,10 m e rugosidade equivalente de  $3,0 \cdot 10^{-4}$  m, está escoando água à temperatura de 37 °C ( $\nu = 7,0 \cdot 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s) com perda de carga unitária de  $J = h_f/L = 0,0115$  mca/m. Pede-se a vazão.

Dados do problema:

$$\begin{aligned} \nu &= 7,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \\ k &= 0,0003 \text{ m} \\ D &= 0,10 \text{ m} \\ J = h_f/L &= 0,0115 \text{ mca/m} \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Para determinar a vazão utiliza-se a equação 8:

$$Q = -2,2214 \sqrt{0,0115 \cdot 9,81 \cdot 0,10^5} \cdot \log_{10} \left( 0,27 \frac{0,0003}{0,10} + \frac{1,7748 \cdot 7 \cdot 0,0000001}{\sqrt{0,0115 \cdot 9,81 \cdot 0,10^3}} \right)$$

Como a equação é explícita, o cálculo aqui é imediato:  $Q = 0,007155$  m<sup>3</sup>/s.

Cálculo com o HidroTec Calculador

- Selecciona-se o material da tubulação: concreto alisado centrifugado.
- Selecciona-se o líquido: água
- Selecciona-se a temperatura: 37 °C
- Selecciona-se "Vazão" para calcular
- Entra-se com a perda unitária:  $J = h_f/L = 0,0115$  mca/m
- Entra-se com o diâmetro interno = 0.10 m
- Saída: vazão  $Q = 0,007152$  m<sup>3</sup>/s; e mais:  $f = 0,0271$ ,  $R_e = 128530$  e  $V = 0,91$  m/s.

## Comentários

Cabe ressaltar que, em que pese a técnica iterativa dar um pouco de velocidade ao cálculo, é, no entanto, uma técnica manual, o que não deixa de ser cansativo, enfadonho e sujeito a erros. Com o uso de programas para computadores, tal como o HidroTec Calculador, a resolução torna-se simples, fácil, automática, rápida e sem margens para erros.

Além disto, o HidroTec possui um banco de dados que contém uma vasta biblioteca com dados, para diferentes temperaturas, dos líquidos mais frequentemente utilizados na prática do dia-a-dia (cerca de 20 tipos), e dos materiais mais usualmente empregados na fabricação de tubos (cerca de 24), tudo já embutido no programa, e com uma interface facilíma, bastante amigável e interativa, além de auto-explicativa, de modo a automatizar e agilizar os cálculos, tornando as operações mais simples e sem necessidade de consultas a outras fontes externas como tabelas e diagramas.

Quanto a precisão dos cálculos, utiliza as melhores ferramentas da hidráulica e mecânica dos fluidos para este fim: as equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White. Além do cálculo do diâmetro, vazão e perda de carga, utilizando a mesma técnica aqui apresentada, o HidroTec calcula também os valores do fator de atrito, do número de Reynolds e da velocidade de escoamento, a fim de que o usuário possa fazer sua análise também através destes parâmetros.

Uma demonstração real do programa pode ser vista na HidroTec webpage, em <http://hidrotec.atspace.co.uk>, onde também a versão demo do HidroTec Calculador poderá ser obtida gratuitamente

## Tabelas

Valores da rugosidade equivalente dos materiais e da viscosidade cinemática dos líquidos utilizados aqui e no HidroTec, retirados de manuais de hidráulica, são mostrados nas tabelas a seguir:

<b>Rugosidade equivalente de alguns materiais de tubos</b>	
<b>MATERIAL</b>	<b>RUG. EQUIVALENTE (m)</b>
Aço comercial	0,00006
Aço galvanizado	0,00016
Aço com ferrugem leve	0,00025
Aço revestido com asfalto	0,0006
Aço revestido com esmalte, vinil, epoxi	0,00006
Alumínio	0,000004
Concreto muito rugoso	0,002
Concreto rugoso	0,0005
Concreto liso	0,0001
Concreto muito liso	0,00006
Concreto alisado, centrifugado	0,0003
Ferro fundido asfaltado	0,000122
Ferro fundido não revestido novo	0,0005
Ferro fundido com ferrugem leve	0,0015
Ferro fundido com cimento centrifugado	0,0001
Fibrocimento	0,0001
Manilha cerâmica	0,0003
Latão, cobre	0,000007
Plásticos	0,00006

<b>Viscosidade cinemática de alguns líquidos</b>		
<b>LÍQUIDO</b>	<b>TEMP. (°C)</b>	<b>VISC. CINEMÁTICA (x10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s)</b>
Água	10	1,31
Água	20	1,00
Água	40	0,66
Água do mar	5	1,61
Água do mar	15	1,22
Água do mar	25	0,97
Álcool Metílico	20	0,727
Asfalto	120	1600
Azeite	38	43
Benzol	20	0,744
Gasolina	20	0,6
Glicerina	20	1180
Glicerina	40	223
Leite	20	1,13
Óleo de algodão	38	38
Óleo de baleia	38	38
Óleo de linhaça	38	30
Óleo de soja	38	35
Óleo SAE-30	30	130
Óleo SAE-30	40	80
Óleo SAE-90	40	250

## ***Referências Bibliográficas***

- Assy, T.M.; "O emprego da fórmula universal de perda de carga e as limitações das fórmulas empíricas". Cetesb, São Paulo, 1977.
- Hwang, N.H.C.; "Fundamentos de sistemas de engenharia hidráulica". Prentice-Hall, Rio de Janeiro, 1984.
- Quintela, A.C.; "Hidráulica". Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1981.
- Simon, A.L.; "Hydraulics". John Wiley & Sons, New York, 1986.
- Tullis, J.P.; "Hydraulics of pipelines". John Wiley & Sons, New York, 1989.

Vitória, maio de 2001

(\*) O autor é ex-Engenheiro Ass. Técnico da Tubos e Conexões Tigre S/A e atualmente é Gerente de Manutenção do SESC/ES.