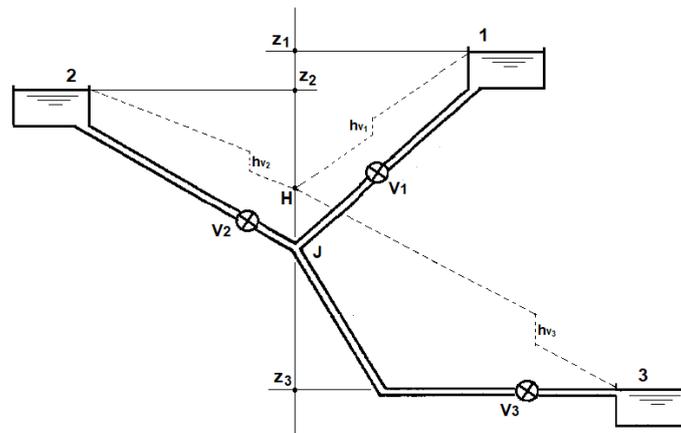


Problema dos três reservatórios com junção comum e com três válvulas. Uso do Excel

Engº Luiz Camargo

Este texto tem por objetivo analisar a solução do problema dos três reservatórios, interligados por condutos com uma junção comum, sendo que cada um deles provido de uma válvula de controle, conforme figura abaixo. A análise aqui apresentada consiste em se determinar da altura de pressão no ponto de junção dos condutos, bem como a vazão em cada um deles, utilizando a conhecida ferramenta "Solver" do Excel, onde são previamente conhecidos o comprimento, diâmetro e rugosidade equivalente de cada tubo, a altura topográfica de cada reservatório e o coeficiente de perda de carga de cada válvula. Ao final é apresentada uma planilha contendo um problema ilustrativo.



A perda de carga distribuída em cada conduto mostrado na figura acima, excluindo a válvula, dada pela equação de Darcy-Weisbach, pode ser expressa na forma:

$$h_f = \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \quad (1)$$

Já para a perda de carga localizada apenas nas válvulas utiliza-se a expressão:

$$h_v = \frac{8K_v Q^2}{g\pi^2 D^4} \quad (2)$$

Portanto a perda de carga total em cada conduto, desprezando as demais singularidades, será:

$$h_T = h_f + h_v = Z - H \quad (3)$$

onde:

- Q = vazão no conduto conectado ao reservatório (m^3/s)
- D = diâmetro do conduto conectado ao reservatório (m)
- Z = cota topográfica do reservatório de nível constante (m)
- H = altura de pressão no ponto J de junção dos três reservatórios (m)
- L = comprimento do tubo que une o reservatório à junção (m)
- f = fator de atrito de Darcy-Weisbach em cada conduto (adimensional)
- K_v = coeficiente de perda de carga da válvula (adimensional)*
- h_f = perda de carga distribuída ao longo de cada conduto (m)
- h_v = perda de carga localizada em cada válvula (m)
- V = válvula de controle
- g = aceleração da gravidade local (m/s^2)
- Q e H são grandezas incógnitas e as demais são conhecidas.
- linha tracejada = linha piezométrica.

* O coeficiente de perda de carga da válvula K_v é um valor adimensional que depende da geometria e do grau de fechamento da válvula, entre outros fatores. Em geral este coeficiente é determinado experimentalmente, e em situações práticas assume valores constantes que na literatura são encontrados em tabelas e gráficos.

Substituindo as Eqs. (1) e (2) na Eq. (3):

$$\frac{8fLQ^2}{g\pi^2D^5} + \frac{8K_vQ^2}{g\pi^2D^4} = Z - H \quad (4)$$

Explicitando Q , vem:

$$Q = \sqrt{\frac{g\pi^2D^4(Z-H)/8}{\frac{fL}{D} + K_v}} \quad (5)$$

Na Eq. (5) o fator de atrito é uma grandeza desconhecida. Com vistas a tornar explícito o cálculo da vazão, aqui será introduzida uma simplificação que consiste em admitir o escoamento em cada conduto como plenamente turbulento, o que permite que se determine o fator de atrito com a equação de von Karman:

$$f = 0,25 \left[\log_{10} \left(\frac{k}{3,7D} \right) \right]^{-2} \quad (6)$$

onde

k = rugosidade equivalente da parede do conduto (m)

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (5), tem-se:

$$Q = \sqrt{\frac{g\pi^2D^4(Z-H)/8}{\frac{L}{4D} \left[\log_{10} \left(\frac{k}{3,7D} \right) \right]^{-2} + K_v}} \quad (7)$$

O reservatório mais alto será sempre ABASTECEDOR e o mais baixo sempre RECEPTOR. Já o reservatório intermediário poderá ser abastecedor, receptor ou neutro, dependendo da posição da cota piezométrica H no ponto de junção. Logo as incógnitas do problema são: a altura H , o sentido do fluxo no conduto intermediário, e, por conseguinte, as vazões nos três condutos.

Portanto a Eq. (7) é que governará o escoamento no sistema. Então, considerando as demais perdas singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos comprimentos reais dos condutos, aplicando esta equação aos três condutos, e adotando os índices 1, 2 e 3 para cada uma das grandezas acima citadas, utilizadas respectivamente em cada um dos reservatórios, do nível mais alto para o mais baixo, tem-se:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{g\pi^2D_1^4(Z_1-H)/8}{\frac{L_1}{4D_1} \left[\log_{10} \left(\frac{k_1}{3,7D_1} \right) \right]^{-2} + K_{v1}}} \quad (8)$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{g\pi^2D_2^4(Z_2-H)/8}{\frac{L_2}{4D_2} \left[\log_{10} \left(\frac{k_2}{3,7D_2} \right) \right]^{-2} + K_{v2}}} \quad (9)$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{g\pi^2D_3^4(Z_3-H)/8}{\frac{L_3}{4D_3} \left[\log_{10} \left(\frac{k_3}{3,7D_3} \right) \right]^{-2} + K_{v3}}} \quad (10)$$

Convencionando-se como negativa a vazão que sai da junção (indo para o reservatório receptor) e, consequentemente, como positiva a vazão que chega na junção (vinda do reservatório abastecedor), então, pela equação da continuidade aplicada no ponto de junção dos condutos:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \tag{11}$$

A solução do problema, então, consiste na resolução do sistema de 4 equações, (8), (9), (10) e (11), e 4 incógnitas, que são Q_1 , Q_2 , Q_3 e H . Destas variáveis as 3 primeiras podem ser eliminadas substituindo-se as Eqs. (8), (9) e (10) na Eq. (11), a qual possibilitará a determinação de H . Uma vez encontrada a altura de pressão, com as equações (8), (9) e (10) determina-se as vazões Q_1 , Q_2 e Q_3 e o problema estaria resolvido. Vê-se, no entanto, que analiticamente a solução de um sistema desta natureza é algo enfadonho, lento, cansativo e susceptível a erros.

Uma solução plausível pode ser conforme segue:

- 1 - Admite-se um valor inicial para a altura piezométrica no ponto de junção dos condutos.
- 2 - Com a altura piezométrica comum a todos os condutos, calcula-se o valor das vazões de cada um deles e substitui-se esses valores na equação da continuidade.
- 3 - Se a vazão que chega à junção for muito elevada, admite-se um valor maior para a altura piezométrica, o qual reduzirá a vazão que chega e aumentará a vazão que sai.
- 4 - Repete-se este procedimento até que a soma das vazões no ponto de junção seja nula.

O procedimento acima descrito pode ser ajustado para uso com a conhecida ferramenta "Solver" do Excel, cujo trabalho a ser realizado consiste basicamente em, de forma automática, fazer variar o valor de H , calcular os valores Q_1 , Q_2 e Q_3 , sujeitos à restrição $Z_1 \geq H \geq Z_3$, repetidamente, até encontrar o objetivo desejado que é $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$.

Apenas deve-se levar em conta que tendo os reservatórios alturas topográficas distintas, bem como considerando as oscilações de H durante o cálculo, $(Z-H)$ pode resultar em raiz quadrada de um valor negativo, fato este que travaria o cálculo automático, se não observado. Para evitar esse inconveniente, usa-se a função valor absoluto $ABS(Z-H)$ e, posteriormente, para restabelecer o sentido correto de fluxo dentro do conduto, multiplica-se a expressão correspondente à vazão, pela função $SINAL(Z-H)$.

Portanto, abre-se o "Solver" e insere-se a referência à Eq. (11) como célula objetivo na caixa "Definir Objetivo", marcando a opção "Valor de", e adotando para esta opção o valor zero. Na caixa "Alterando Células Variáveis" insere-se a referência à célula destinada a H , partindo de um valor inicial de H , digamos, igual a $(Z_1 + Z_2 + Z_3)/3$. Na caixa "Sujeito às Restrições" insere-se as células fazendo referência a $H \leq Z_1$ e $H \geq Z_3$. Ao se clicar no botão "Resolver", automaticamente o Solver encontrará esses valores e os exibirá. A planilha mostrada adiante, com a solução do sistema aqui apresentado, ilustra bem o procedimento, com os dados e respostas de um problema prático, cujas equações estão no Apêndice.

The image shows an Excel spreadsheet with the following data in columns A through M:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	PROBLEMA DOS TRÊS RESERVATÓRIOS COM TRÊS VÁLVULAS. USO DO SOLVER - UNIDADES SI													
2	$D_1 = 1,000$	$L_1 = 3000,00$	$Z_1 = 30,00$	$k_1 = 0,000200$	$K_{v1} = 4,020$	$g = 9,806$								
3	$D_2 = 0,450$	$L_2 = 600,00$	$Z_2 = 18,00$	$k_2 = 0,000900$	$K_{v2} = 4,020$	$N = 3$								
4	$D_3 = 0,600$	$L_3 = 1000,00$	$Z_3 = 9,00$	$k_3 = 0,000600$	$K_{v3} = 4,020$									
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following configuration:

- Definir Objetivo: $SNS8$
- Para: Valor de: 0
- Alterando Células Variáveis: $SNS4$
- Sujeito às Restrições:
 - $SNS4 \leq SFS2$
 - $SNS4 \geq SFS4$
- Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas
- Selecionar um Método de Solução: GRG Não Linear
- Método de Solução: Seleccione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Seleccione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Seleccione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.
- Buttons: Ajudar, Resolver, Echar

Por fim, cabe ressaltar a óbvia constatação, à vista da Eq. (7), de que $K_V=0$ equivale a um conduto com a válvula totalmente aberta ou sem válvula, enquanto que uma válvula totalmente fechada corresponderá a um coeficiente de perda de carga com valor bem elevado, digamos, $K_V=10^{12}$. Valores usuais de K_V são mostrados no Apêndice.

Bibliografia:

- 1 - Camargo, L. "O problema dos três reservatórios. Uso do Excel". Vitória, dez/2023. Disponível em <http://hidrotec.atspace.co.uk/condufor.htm>. Acesso em jan/2024.
- 2 - Baptista, M. & Lara, M. "Fundamentos de Engenharia Hidráulica", Ed. UFMG, Belo Horizonte, 4ª Edição, 2016.
- 3 - Evett, J.B & Liu, C. "2500 Solved Problems in Fluid Mechanics and Hydraulics", McGraw-Hill, New York, 1989.
- 4 - Streeter, V.L. & Wylie, E.B. & Bedford, K.W. "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, New York, 9th Edition, 1998.

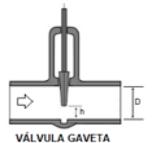
LC, Vitória, jan/2024.

Apêndice.

As equações utilizadas no texto, convertidas para a notação do Excel, têm a seguinte forma:

$Q1 = \text{RAIZ}(L2 * \text{PI}()^2 * B2^4 * \text{ABS}(F2 - N4) / 8 / (D2 / 4 / B2 * (\text{LOG10}(H2 / 3,7 / B2))^{-2} + J2)) * \text{SINAL}(F2 - N4)$
 $Q2 = \text{RAIZ}(L2 * \text{PI}()^2 * B3^4 * \text{ABS}(F3 - N4) / 8 / (D3 / 4 / B3 * (\text{LOG10}(H3 / 3,7 / B3))^{-2} + J3)) * \text{SINAL}(F3 - N4)$
 $Q3 = \text{RAIZ}(L2 * \text{PI}()^2 * B4^4 * \text{ABS}(F4 - N4) / 8 / (D4 / 4 / B4 * (\text{LOG10}(H4 / 3,7 / B4))^{-2} + J4)) * \text{SINAL}(F4 - N4)$
 $\Sigma Q = N5 + N6 + N7$

Valores usuais de K_V são mostrados nas tabelas a seguir:

	$h/D =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
	$K_v =$	∞	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,08	0,95	0,39	0,09	0	
	$\alpha^\circ =$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	67
	$K_v =$	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞
	$\alpha^\circ =$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	65	70	90
	$K_v =$	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	10,8	32,6	118	256	751	∞

Fonte: Batista & Lara, 2016.