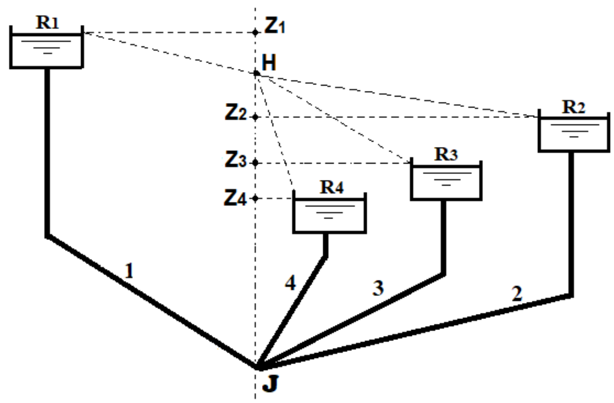
O problema dos N reservatórios com junção comum. Uso do Excel.

Eng° Luiz Camargo

Este texto tem por objetivo analisar a solução do problema dos N reservatórios interligados por condutos com uma junção comum, conforme figura adiante, que consiste na determinação da altura de pressão no ponto de junção dos N condutos, bem como a vazão em cada uma deles, com o emprego das equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White, utilizando a conhecida ferramenta "Solver" do Excel, onde são previamente conhecidos o comprimento, diâmetro e rugosidade equivalente de cada tubo, a viscosidade cinemática do líquido, bem como a altura topográfica de cada reservatório. Ao final é apresentada uma planilha contendo um problema ilustrativo.



A perda de carga em cada conduto mostrado na figura acima, dada pela equação de Darcy-Weisbach, pode ser expressa na forma:

$$h_f = \frac{8fLQ^2}{\pi^2 g D^5}$$

que, após rearrumada, assume também a conveniente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \sqrt{\frac{8Q^2}{\pi^2 g D^5 h_f / L}} \qquad (1)$$

onde:

Q = vazão (m^3/s)
D = diâmetro do conduto (m)
h_f = perda de carga distribuída ao longo de cada conduto (mca)
f = fator de atrito de Darcy-Weisbach (adimensional)
L = comprimento do conduto que une o reservatório à junção (m)
g = aceleração local da gravidade (m/s^2)
linha tracejada = linha piezométrica

Colebrook (1938/1939) estabeleceu a seguinte expressão para determinação do fator de atrito, conhecida como equação de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D} + \frac{2,51}{R_e\sqrt{f}}\right) \qquad (2)$$

O Número de Reynolds, por definição, é dado por:

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D \nu} \tag{3}$$

onde:

k = rugosidade equivalente da parede do tubo (m)
ν = viscosidade cinemática do líquido em escoamento (m^2/s)

Substituindo as Eqs. (1) e (3) na Eq. (2), com vistas a eliminar a variável f, e fazendo operações, tem-se:

$$\frac{2Q}{\pi\sqrt{2gD^5\, h_f / L}} = -\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D} + \frac{2,51\nu}{\sqrt{2gD^3\, h_f / L}}\right) \tag{4}$$

Como a carga em cada tubo é dada por:

$$h_f = Z_i - H$$

então, da Eq. (4):

$$Q_i = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2gD_i^5\left(Z_i - H\right)/L_i}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{k_i}{D_i} + \frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD_i^3\left(Z_i - H\right)/L_i}}\right) \tag{5}$$

onde:

Z_i = altura topográfica de cada reservatório (m).
H = altura de pressão (ou carga piezométrica) no ponto **J** de junção dos ***n*** condutos (m).
i = 1, 2, 3, ... ***n***, onde ***n*** é o número de reservatórios.
Q e H são grandezas incógnitas e as demais são conhecidas.

O reservatório mais alto será sempre ABASTECEDOR e o mais baixo sempre RECEPTOR. Já os reservatórios intermediários poderão ser abastecedores, receptores ou neutros, dependendo da carga piezométrica H no ponto de junção **J**. Logo, as incógnitas do problema são: a altura H, o sentido do fluxo nos condutos intermediários, e, por conseguinte, as vazões nos ***n*** condutos.

Portanto a Eq. (5) é que governará o escoamento no sistema. Então, considerando as demais perdas singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos comprimentos reais dos condutos, aplicando esta equação aos ***n*** condutos, e adotando os índices 1, 2, 3, ... ***n*** para cada uma das grandezas acima citadas, utilizadas respectivamente em cada reservatório, do nível mais alto para o mais baixo, tem-se:

$$Q_1 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2gD_1^5\left(Z_1 - H\right)/L_1}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{k_1}{D_1} + \frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD_1^3\left(Z_1 - H\right)/L_1}}\right) \tag{6}$$

$$Q_2 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2gD_2^5\left(Z_2 - H\right)/L_2}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{k_2}{D_2} + \frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD_2^3\left(Z_2 - H\right)/L_2}}\right) \tag{7}$$

$$Q_3 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2gD_3^{\,5}\left(Z_3 - H\right)/L_3}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{k_3}{D_3} + \frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD_3^{\,3}\left(Z_3 - H\right)/L_3}}\right) \tag{8}$$

...

$$Q_n = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2gD_n^{\,5}\left(Z_n - H\right)/L_n}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{k_n}{D_n} + \frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD_n^{\,3}\left(Z_n - H\right)/L_n}}\right) \tag{9}$$

Convenciona-se como negativa a vazão que sai da junção (indo para o reservatório receptor) e, consequentemente, como positiva a vazão que chega na junção (vinda do reservatório abastecedor). Então, pela equação da continuidade aplicada no ponto de junção dos condutos:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_n = 0 \tag{10}$$

A solução do problema consiste basicamente na resolução do sistema de $\boldsymbol{n}+1$ equações, (6), (7)... (9) e (10), com $\boldsymbol{n}+1$ incógnitas, que são Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n e H. Destas variáveis as $\boldsymbol{n}$ primeiras podem ser eliminadas substituindo-se as Eqs. (6), (7), ..., (9) na Eq. (10), a qual possibilitará a determinação da altura de pressão H na junção das tubulações. Uma vez determinado o valor de H, os valores de Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n são determinados com as Eqs. (6), (7), ..., (9). Vê-se, no entanto, que analiticamente a solução de um sistema desta natureza é algo inviável, uma vez que pode envolver um grande número de equações, não lineares.

Uma solução plausível pode ser conforme segue:

1 - Admite-se um valor inicial para a altura piezométrica no ponto de junção dos condutos.
2 - Com a altura piezométrica comum a todos os condutos, calcula-se o valor das vazões de cada um deles e substitui-se esses valores na equação da continuidade.
3 - Se a vazão que chega à junção for muito elevada, admite-se um valor maior para a altura piezométrica, o qual reduzirá a vazão que chega e aumentará a vazão que sai.
4 - Repete-se este procedimento até que a soma das vazões no ponto de junção seja nula.

O procedimento acima descrito pode ser ajustado para uso com a conhecida ferramenta "Solver" do Excel, cujo trabalho a ser realizado consiste basicamente em, de forma automática, fazer variar o valor de H, calcular os respectivos valores de Q_1, Q_2, ... Q_n, sujeitos à restrição $Z_1 \geq H \geq Z_n$, repetidamente, até encontrar o objetivo desejado que é $Q_1+Q_2+...+Q_n=0$.

Apenas deve-se levar em conta que tendo os reservatórios alturas geométricas distintas, bem como considerando as oscilações de H durante o cálculo, (Z-H) pode resultar em raiz quadrada de número negativo, fato este que poderia vir a travar o cálculo automático, se não observado. Para evitar esse inconveniente, usa-se a função valor absoluto ABS(Z-H) e, posteriormente, para restabelecer o sentido correto de fluxo dentro do conduto, multiplica-se a vazão pela função SINAL(Z-H).

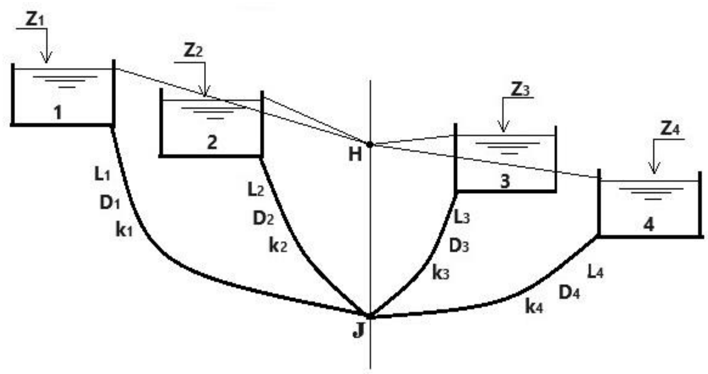
Portanto, abre-se o "Solver" e insere-se a referência à Eq. (10) como célula objetivo na caixa "Definir Objetivo", marcando a opção "Valor de", e adotando para esta opção o valor zero. Na caixa "Alterando Células Variáveis" insere-se a referência à célula destinada a H, partindo de um valor inicial de H, digamos, igual a $(Z_1+Z_2+...+Z_n)/n$. Na caixa "Sujeito às Restrições" insere-se as células fazendo referência a $H \leq Z_1$ e $H \geq Z_n$. Ao se clicar no botão "Resolver", automaticamente o Solver encontrará esses valores e os exibirá. A planilha mostrada adiante, com a solução do sistema aqui apresentado, cujas equações estão no Apêndice, e ilustra bem o procedimento, com os dados e respostas de um problema prático apresentado na figura a seguir.

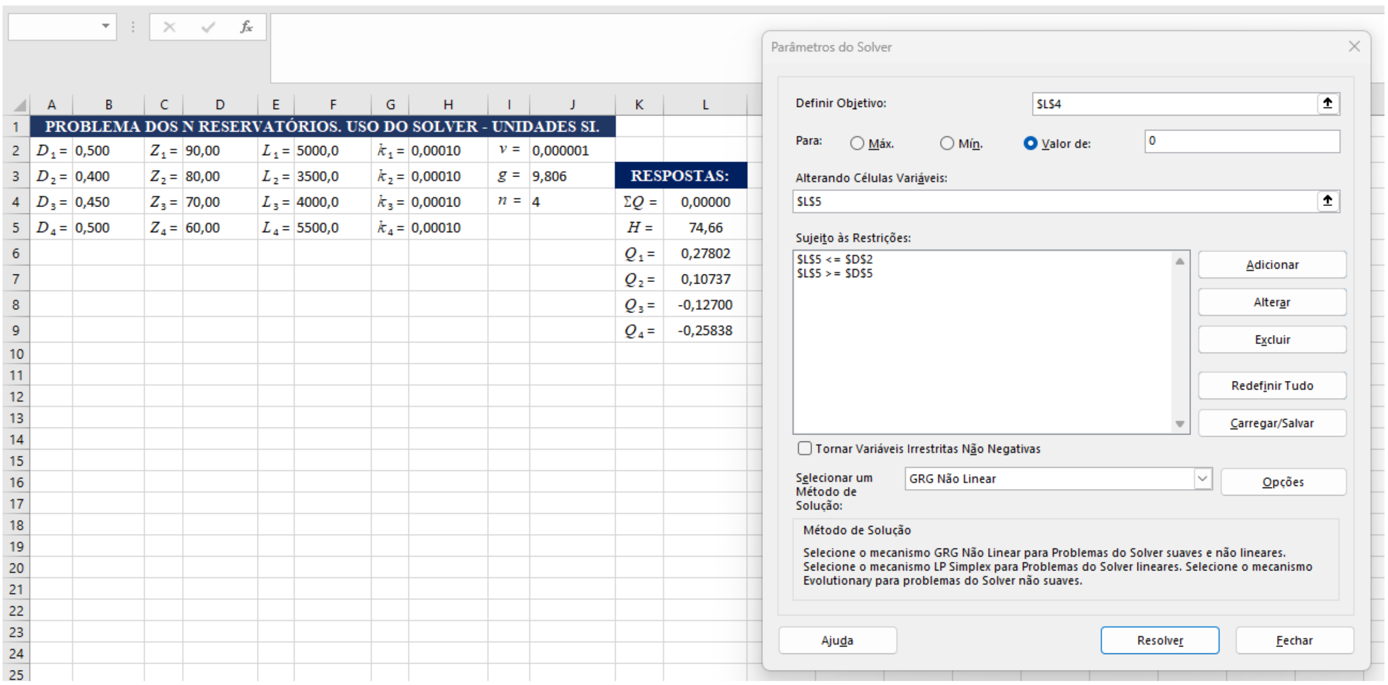
Dados:

Trecho	Z (m)	D (m)	L (m)	k (m)
1	90	0,50	5000	0,0001
2	80	0,40	3500	0,0001
3	70	0,45	4000	0,0001
4	60	0,50	5500	0,0001

Viscosidade cinemática do líquido = 0,000001 m^2/s.

Estabeleça o balanceamento das vazões e encontre a carga na junção dos condutos.





Solução:

H = 74,66 m
Q_1 = 0,27802 m^3/s
Q_2 = 0,10737 m^3/s
Q_3 = -0,12700 m^3/s
Q_4 = -0,25838 m^3/s

Os reservatórios 3 e 4 são receptores e os demais abastecedores.

Bibliografia:

1 - Camargo, L.; "O problema dos N reservatórios". Vitória, Nov/2020. Disponível em http://hidrotec.atspace.co.uk/condufor.htm. Acesso em Nov/2023.
2 - Colebrook, C.F.; "Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipes". Journal of the Institution of Civil Engineers, vol. 11, p. 133-156, 1938/1939.
3 - Evett, J.B.; Liu, C.; "2500 Solved Problems in Fluid Mechanics & Hydraulics". McGraw-Hill, NY, 1989.
4 - Streeter, V.L., Wylie, E.B. & Bedford, K.W. "Fluid Mechanics", WCB/McGraw-Hill, 9th edition, Boston, 1998.

LC, Vitória, Dez/2023.

Apêndice:

As equações utilizadas no texto, convertidas para a notação do Excel, têm a seguinte forma:

```
Q1 =-PI()/2*RAIZ(2*J3*B2^5*ABS(D2-L5)/F2)*LOG10(0,27*H2/B2+2,51*J2/RAIZ(2*J3*B2^3*ABS(D2-L5)/F2))*SINAL(D2-L5)
Q2 =-PI()/2*RAIZ(2*J3*B3^5*ABS(D3-L5)/F3)*LOG10(0,27*H3/B3+2,51*J2/RAIZ(2*J3*B3^3*ABS(D3-L5)/F3))*SINAL(D3-L5)
Q3 =-PI()/2*RAIZ(2*J3*B4^5*ABS(D4-L5)/F4)*LOG10(0,27*H4/B4+2,51*J2/RAIZ(2*J3*B4^3*ABS(D4-L5)/F4))*SINAL(D4-L5)
Q4 =-PI()/2*RAIZ(2*J3*B5^5*ABS(D5-L5)/F5)*LOG10(0,27*H5/B5+2,51*J2/RAIZ(2*J3*B5^3*ABS(D5-L5)/F5))*SINAL(D5-L5)
```

///