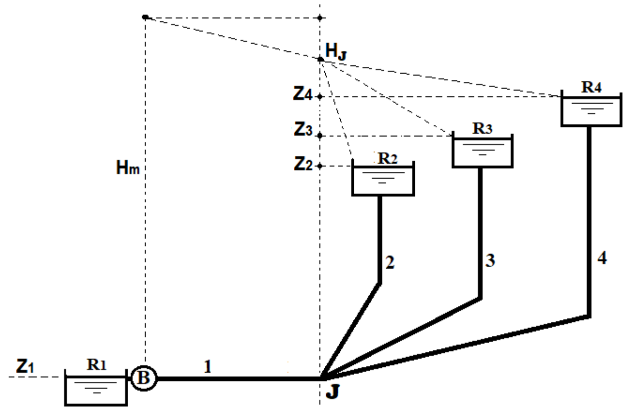
# O problema dos N reservatórios de junção comum, com bombeamento.

*Eng° Luiz Camargo*

O presente texto tem por objetivo analisar a solução do problema dos N reservatórios interligados por condutos com uma junção comum, sendo um deles provido de uma bomba hidráulica junto ao reservatório, que consiste na determinação da altura de pressão no ponto de junção, bem como a vazão em cada conduto, utilizando as equações de Darcy-Weisbach e Colebrook-White, e o emprego do método iterativo da bisseção, onde são previamente conhecidos o comprimento, diâmetro e rugosidade dos tubos, a altura geométrica dos reservatórios, a viscosidade cinemática do líquido e a potência e rendimento (ou curva) da bomba. Ao final é apresentado um código Basic para cálculo automático.




A perda de carga em tubos, mostrados na figura, dada pela equação de Darcy-Weisbach, pode ser expressa na forma:

$$h_f = \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \tag{1}$$

onde $f$ é obtido iterativamente pela equação de Colebrook-White:

$$f = 1,325\left[-\ln\left(\frac{k}{3,7D} + \frac{1,971D\nu}{Q\sqrt{f}}\right)\right]^{-2} \tag{2}$$

sendo que para o tubo 1,

$$h_f = H_m + Z_1 - H_J \tag{3}$$

e para os demais tubos,

$$h_f = Z - H_J \tag{4}$$

Então, considerando as perdas de carga singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos comprimentos dos condutos, e combinando as Eqs. (2), (3) e (4) com a Eq. (1), as vazões nos tubos 1, 2, 3, ... ***n*** são obtidas, respectivamente, com as seguintes expressões:

$$Q_1 = -0,9647\sqrt{\left(H_m + Z_1 - H_J\right)gD_1^5 / L_1}\cdot\ln\left(\frac{k_1}{3,7D_1} + \frac{1,7748\nu}{\sqrt{\left(H_m + Z_1 - H_J\right)gD_1^3 / L_1}}\right) \tag{5}$$

$$Q_2 = -0,9647\sqrt{\left(Z_2 - H_J\right)gD_2^5 / L_2}\cdot\ln\left(\frac{k_2}{3,7D_2} + \frac{1,7748\nu}{\sqrt{\left(Z_2 - H_J\right)gD_2^3 / L_2}}\right) \tag{6}$$

$$Q_3 = -0,9647\sqrt{\left(Z_3 - H_J\right) g D_3^{\,5} / L_3} \cdot \ln\left(\frac{k_3}{3,7D_3} + \frac{1,7748\nu}{\sqrt{\left(Z_3 - H_J\right) g D_3^{\,3} / L_3}}\right) \qquad (7)$$

... ... ...

$$Q_n = -0,9647\sqrt{\left(Z_n - H_J\right) g D_n^{\,5} / L_n} \cdot \ln\left(\frac{k_n}{3,7D_n} + \frac{1,7748\nu}{\sqrt{\left(Z_n - H_J\right) g D_n^{\,3} / L_n}}\right) \qquad (8)$$

Pela equação da continuidade, convencionando vazão positiva a que chega na junção J e negativa para a que sai, vem:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_n = 0 \qquad (9)$$

onde:
$Q$ = vazão ($m^3/s$)
$D$ = diâmetro do tubo (m)
$Z$ = cota geométrica de cada reservatório (m)
$H_J$ = altura piezométrica do ponto J de junção dos $n$ tubos (m)
$H_m$ = altura manométrica na bomba B (m)
$n$ = número de reservatórios
$h_f$ = perda de carga distribuída ao longo do tubo (m)
$k$ = rugosidade equivalente do tubo (m)
$f$ = fator de atrito de Darcy-Weisbach (adimensional)
$\nu$ = viscosidade cinemática do líquido em escoamento ($m^2/s$)
$L$ = comprimento do tubo (m)
$B$ = bomba de rotação constante e com válvula de retenção.
$R$ = reservatório de nível constante.
$Q$ e $H_J$ são grandezas incógnitas e as demais são conhecidas.

A grandeza $H_m$ é eliminada introduzindo na Eq. (5) a curva da bomba ou a equação da potência, isto é:

$$H_m = A_0 + A_1 Q_1 + A_2 Q_1^2 + A_3 Q_1^3 \qquad (10\text{-a})$$

ou

$$H_m = \frac{0,0745\eta P}{Q_1} \quad \text{[se o líquido for água]} \qquad (10\text{-b})$$

onde:
$P$ = potência do grupo motobomba (hp)
$\eta$ = rendimento do grupo motobomba (%)
$A_i$ = coeficientes da curva da bomba em unidades SI (fornecidos pelo fabricante) ($i$ =1,2,3...)

Assim, introduzindo as Eq. (10-a) ou (10-b) na Eq. (5), restarão, portanto, $n$+1 equações, de (5) a (9), e $n$+1 incógnitas, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, ..., $Q_n$ e $H_J$, introdução essa que transforma a Eq. (5) numa equação transcendente e implícita. De modo geral, uma equação transcendente não possui uma solução exata expressa através de funções conhecidas, motivo pelo qual será necessário recorrer ao cálculo numérico para obter uma solução.

Um procedimento viável na solução desse problema envolve um processo iterativo de aproximações sucessivas. Um roteiro básico de cálculo, com as simplificações mencionadas, consiste de:

1 - Estimar um valor inicial para a vazão $Q_1$ na bomba;
2 - Com a curva característica da bomba, ou com a potência e rendimento da bomba, Eqs. (10-a) ou (10-b), calcular a altura manométrica $H_m$;
3 - Com as Eqs. (1) e (2) calcular a perda de carga $h_f$ na tubulação que conduz água até a junção no ponto J;
4 - Determinar, com a Eq. (3), a altura de pressão $H_J$ no ponto de junção J;
5 - Com esta altura de pressão e com as Eqs. (6), (7), ... e (8) calcular a vazões $Q_2$, $Q_3$, ... e $Q_n$ nos reservatórios 2, 3, ... e $n$;
6 - Se a vazão que entra em J for igual à vazão que sai, o problema está resolvido, caso contrário atribuir à vazão da bomba $Q_1$ um novo valor mais adequado e repetir o procedimento até que a vazão que entra em J seja igual a soma

das que saem. Com isso obtém-se $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, ..., $Q_n$ e $H_J$.

Neste procedimento apenas deve-se levar em conta que ($Z$-$H_J$) pode resultar num valor negativo e que em tal caso sua raiz quadrada poderia vir a travar o cálculo automático. Para evitar essa situação, usa-se o valor absoluto, abs($Z$-$H_J$), e posteriormente multiplica-se a vazão por sgn($Z$-$H_J$) para restabelecer o sentido correto de fluxo dentro do conduto.

Resolução desta natureza quando realizada manualmente torna-se tarefa enfadonha e cansativa. O mais apropriado é utilizar o cálculo automático, por processo informático, com o emprego de recurso iterativo. O método da bisseção é uma maneira prática de obter a raiz de uma equação quando se sabe que ela está contida entre os limites de uma faixa de valores. Esse método tem a vantagem da simplicidade operacional e convergência garantida. Exige dois valores iniciais limites, $Q_{min}$ e $Q_{max}$, cuja solução (raiz) esteja na faixa entre ambos, para os quais pode-se adotar, digamos, 0 e 50 m$^3$/s, uma vez que, numa estação de bombeamento dificilmente a vazão no conduto estará fora desses limites.

Note-se que o valor de $Q$ nas Eqs. (5) a (8), é sempre uma função de $H_J$, qual seja, $Q = f(H_J)$. A solução de $f(H_J)$ é obtida atribuindo-se sucessivos valores iniciais para $Q$, conforme roteiro indicado, que gerarão os respectivos valores para $H_m$ e $H_J$ que possibilitarão encontrar os subsequentes e sucessivos valores de $Q$, até que seja satisfeita a Eq. (9).

O método iterativo da bisseção consiste em, primeiro, dividir ao meio o intervalo entre os valores iniciais, encontrando:

$$Q_{med} = \left(Q_{\max} + Q_{\min}\right)/2$$

Este é o valor inicial estimado. Ao final do roteiro mencionado anteriormente, se $Q_1+Q_2+Q_3+...+Q_n>0$, atribui-se o valor de $Q_{med}$ a $Q_{max}$. Senão, atribui-se o valor de $Q_{med}$ a $Q_{min}$. E o processo repete-se.

A cada novo intervalo, que é reduzido à metade do anterior, vai-se repetindo o procedimento e calculando novos valores de $Q$ até que seja atingida a precisão desejada, tal que abs($Q_{max}$-$Q_{min}$) ≤ tol e abs($f(Q_{med})$) ≤ tol.

Como o intervalo é sempre dividido ao meio, é possível estabelecer uma estimativa do número de iterações a serem realizadas, para determinado intervalo [$Q_{min}$, $Q_{max}$] e tolerância de erro **tol**.

Digamos que seja k o número de iterações. Na iteração de ordem k, o intervalo [$Q_{mink}$, $Q_{maxk}$] terá um valor igual a

$$\frac{Q_{max} - Q_{\min}}{2^k}$$

Para que k seja a última iteração, é necessário que este intervalo seja menor ou igual à tolerância especificada. Portanto o processo iterativo pode ser interrompido pelo número de iterações:

$$\frac{Q_{max} - Q_{\min}}{2^k} \leq tol$$

$$k > \frac{\log\left(Q_{\max} - Q_{\min}\right) - \log\left(tol\right)}{\log\left(2\right)} \qquad (11)$$

Qual seja, o processo iterativo pode ser interrompido pelo número de iterações que satisfaça a inequação (11).

Em termos de cálculo automatizado o critério aqui apresentado é mostrado no Apêndice, no código fonte para um programa computacional denominado NREBOMDW.BAS, bem compacto, plenamente funcional, escrito em linguagem Turbo Basic, mas que pode facilmente, querendo, ser adaptado para outras versões Basic ou para outras linguagens computacionais, ou ainda para Excel, MatLab, Mathematica, etc. Os dados são introduzidos através dos comandos *READ* e *DATA*.

Referências bibliográficas:

1 - Dieguez, J.P.P. "Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia", Interciência, Rio, 1992.
2 - Evett, J.B. & Liu, C. "2500 Solved Problems in Fluid Mechanics and Hydraulics", McGraw-Hill, New York, 1989.
3 - Streeter, V.L. & Wylie, E.B. "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, 8th Edition, New York, 1985.

LC, Vitória, 20/09/2020.

**APÊNDICE.**

```
010 'NREBOMDW.BAS - N RESERVATORIOS COM JUNCAO COMUM E BOMBEAMENTO - EQ DARCY-WEISBACH E COLEBROOK-WHITE
020 'USO DO METODO DA BISSECAO - DADOS INTRODUZIDOS COM COMANDOS READ e DATA (SI).
030 CLEAR:DEFINT I,C,N:G=9.806:VISC=0.000001: N=5 'nr de reservatórios
040 FOR I=1 TO N
050 READ L(I),D(I),Z(I),K(I)
060 DATA 10000,4.5,0,0.00006, 2000,2.0,12,0.00005, 2500,2.5,18,0.00008, 1800,2.2,23,0.00005, 2000,2.3,25,0.00009
070 NEXT I
075 'Existem duas linhas 080. Usar uma ou outra, nunca as duas. São os dados da bomba: Eqs. 10-a ou 10-b.
080 READ A0,A1,A2,A3:DATA 100,-0.2,-0.03,-0.007:CH=1 'EQ. 10-a
'080 READ POT,REND:DATA 10000,0.668:CH=2 'EQ. 10-b
090 QMIN=0:QMAX=50:TOL=0.000001:ITER=(LOG(QMAX-QMIN)-LOG(TOL))/LOG(2)
100 FOR I1=1 TO ITER
110 QMED=(QMAX+QMIN)/2
120 IF CH=1 THEN HM=A0+A1*QMED+A2*QMED^2+A3*QMED^3 ELSE IF CH=2 THEN HM=0.0745*REND*POT/QMED 'EQ. (10-a) OU (10-b)
130 f=0.01:DO:f0=f:f=1.325*(-LOG(0.27*K(1)/D(1)+1.971*D(1)*VISC/QMED/SQR(f0)))^(-2):LOOP WHILE ABS(f-f0)/f>TOL
140 HF1=0.81*f*L(1)*QMED^2/(G*D(1)^5):HJUN=HM+Z(1)-HF1:SOMA=0
150 FOR I=1 TO N
160 IF I=1 THEN Q(I)=QMED
170 IF I>1 THEN Q(I)=-0.9647*SQR(ABS(Z(I)-HJUN)*G*D(I)^5/L(I))*LOG(0.27*K(I)/D(I)+1.7748*VISC/SQR(ABS(Z(I)-HJUN)*G*D(I)^3/L(I)))*SGN(Z(I)-HJUN)
180 SOMA=SOMA+Q(I)
190 NEXT I
200 IF SOMA>0 THEN QMAX=QMED ELSE QMIN=QMED
210 NEXT I1
220 COLOR 0,15,15:CLS:?:?" EXIBICAO DE DADOS (SI).":?:?" ENTRADA:":?
230 FOR I=1 TO N
240 ?" TUBO(";MID$(STR$(I),2);"): L, D, Z, K = ";L(I);:?USING"##.###";D(I);:?" ";Z(I);" ";:?USING"#.######";K(I):NEXT I
250 IF CH=1 THEN ?" COEF. CURVA BOMBA: A0, A1, A2, A3 =";INT(100*A0)/100;:?USING"##.###";A1;:?" ";:?USING"##.###";A2;:?" ";:?USING"##.###";A3
260 IF CH=2 THEN ?" BOMBA: POT. =";INT(10*POT)/10;"HP =";INT(7.45*POT)/10;"KW / REND. = ";:?USING"#.###";REND
270 PRINT:PRINT" VAZOES RESULTANTES (NEG. QUANDO SAI DA JUNCAO):":PRINT
280 FOR I=1 TO N:PRINT" Q(";MID$(STR$(I),2);") = ";:PRINT USING"###.####";Q(I):NEXT I
290 PRINT:PRINT" ALTURA PIEZOMETRICA NA JUNCAO: ";INT(100*HJUN)/100:END
```

Nota: a numeração das linhas do código é meramente orientativa e, querendo, pode ser removida. Algumas versões Basic, como GW-Basic, exigem a numeração.

Exemplos de aplicação:

1 - Exemplo 11.10 de Streeter & Wylie, "Fluid Mechanics", 8th edition, McGraw-Hill, NY, 1985.

```
EXIBICAO DE DADOS (SI).

ENTRADA:

TUBO(1): L, D, Z, K =  10000  4.500  0  0.000060
TUBO(2): L, D, Z, K =  2000  2.000  12  0.000050
TUBO(3): L, D, Z, K =  2500  2.500  18  0.000080
TUBO(4): L, D, Z, K =  1800  2.200  23  0.000050
TUBO(5): L, D, Z, K =  2000  2.300  25  0.000090
COEF. CURVA BOMBA: A0, A1, A2, A3 = 100 -0.200 -0.030 -0.007

VAZOES RESULTANTES (NEG. QUANDO SAI DA JUNCAO):

Q(1) =  20.3378
Q(2) = -14.6425
Q(3) = -15.0993
Q(4) =   0.8632
Q(5) =   8.5407

ALTURA PIEZOMETRICA NA JUNCAO:  22.97
```

Resposta do livro:
Q1 = 20.325
Q2 = -14.644
Q3 = -15.100
Q4 = 0.876
Q5 = 8.543
HJUN = 22.97019

2 - Exemplo 9.5 de Quintela, "Hidráulica", 1ª edição, Gulbenkian, Lisboa, 1981.

```
EXIBICAO DE DADOS (SI).

ENTRADA:

TUBO(1): L, D, Z, K =  1200  0.500  15  0.000440
TUBO(2): L, D, Z, K =  500  0.500  70  0.000440
TUBO(3): L, D, Z, K =  800  0.300  80  0.000440
BOMBA: POT. = 358 HP = 267 KW / REND. = 0.750

VAZOES RESULTANTES (NEG. QUANDO SAI DA JUNCAO):

Q(1) =   0.3090
Q(2) =  -0.4068
Q(3) =   0.0978

ALTURA PIEZOMETRICA NA JUNCAO:  74.23
```

Resposta do livro:
Q1 = 0.31
Q2 = -0.40
Q3 = 0.09
HJUN = 74.5
(Betão liso novo k estimado: 0.00044 m)

3 - Exemplo 12.9 de Streeter & Wylie, "Mecánica de Fluidos", 9ª edición, McGraw-Hill, México, 1987.

```
EXIBICAO DE DADOS (SI).

ENTRADA:

TUBO(1): L, D, Z, K =  10000  4.500  0  0.000060
TUBO(2): L, D, Z, K =  2000  2.000  12  0.000050
TUBO(3): L, D, Z, K =  2500  2.500  18  0.000080
TUBO(4): L, D, Z, K =  2000  2.300  25  0.000090
COEF. CURVA BOMBA: A0, A1, A2, A3 = 100 -0.200 -0.030 -0.007

VAZOES RESULTANTES (NEG. QUANDO SAI DA JUNCAO):

Q(1) =  20.3566
Q(2) = -14.5099
Q(3) = -14.7962
Q(4) =   8.9495

ALTURA PIEZOMETRICA NA JUNCAO:  22.77
```

Resposta do livro:
Q1 = 20.275
Q2 = -14.495
Q3 = -14.761
Q4 = 8.999
HJUN = 22.75 m