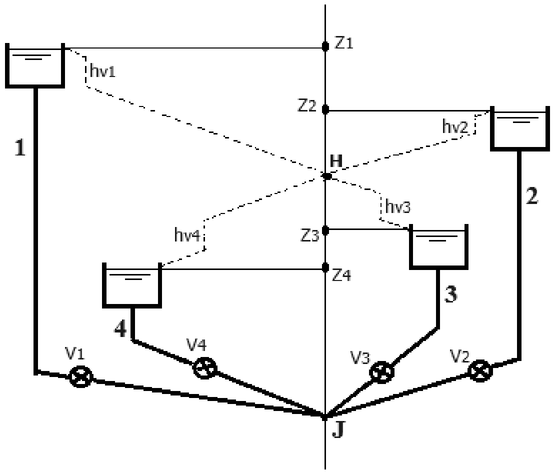
Problema dos N reservatórios com junção comum e com N válvulas. Uso do Excel

Eng° Luiz Camargo

Este texto tem por objetivo analisar a solução do problema dos N reservatórios, interligados por condutos com uma junção comum, sendo que cada um deles provido de uma válvula de controle, conforme figura abaixo. A análise aqui apresentada consiste em se determinar da altura de pressão no ponto de junção dos condutos, bem como a vazão em cada um deles, utilizando a conhecida ferramenta "Solver" do Excel, onde são previamente conhecidos o comprimento, diâmetro e rugosidade equivalente de cada tubo, a altura topográfica de cada reservatório e o coeficiente de perda de carga de cada válvula. Ao final é apresentada uma planilha contendo um problema ilustrativo.



A perda de carga distribuída em cada conduto mostrado na figura acima, excluindo a válvula, dada pela equação de Darcy-Weisbach, pode ser expressa na forma:

$$h_f = \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \tag{1}$$

Já para a perda de carga localizada apenas nas válvulas utiliza-se a expressão:

$$h_V = \frac{8K_V Q^2}{g\pi^2 D^4} \tag{2}$$

Portanto a perda de carga total em cada conduto, desprezando as demais singularidades, será:

$$h_T = h_f + h_V = Z - H \tag{3}$$

onde:

Q = vazão no conduto conectado ao reservatório (m^3/s)
D = diâmetro do conduto conectado ao reservatório (m)
Z = cota topográfica do reservatório de nível constante (m)
H = altura de pressão no ponto **J** de junção dos ***n*** reservatórios (m)
L = comprimento do tubo que une o reservatório à junção (m)
f = fator de atrito de Darcy-Weisbach em cada conduto (adimensional)
K_V = coeficiente de perda de carga em cada válvula (adimensional)*
h_f = perda de carga distribuída ao longo de cada conduto (m)
h_V = perda de carga localizada em cada válvula (m)
V = válvula de controle
g = aceleração da gravidade local (m/s^2)
Q e H são grandezas incógnitas e as demais são conhecidas.
linha tracejada = linha piezométrica.

---

* O coeficiente de perda de carga da válvula K_V é um valor adimensional que depende da geometria e do grau de fechamento da válvula, entre outros fatores. Em geral este coeficiente é determinado experimentalmente, e em situações práticas assume valores constantes que na literatura são encontrados em tabelas e gráficos.

Substituindo as Eqs. (1) e (2) na Eq. (3):

$$\frac{8\,fLQ^2}{g\pi^2 D^5}+\frac{8K_V Q^2}{g\pi^2 D^4}=Z-H \tag{4}$$

Explicitando Q, vem:

$$Q=\sqrt{\frac{g\pi^2 D^4\left(Z-H\right)/8}{\frac{fL}{D}+K_V}} \tag{5}$$

Na Eq. (5) o fator de atrito é uma grandeza desconhecida. Com vistas a tornar explícito o cálculo da vazão, aqui será introduzida uma simplificação que consiste em admitir o escoamento em cada conduto como plenamente turbulento, o que permite que se determine o fator de atrito com a equação de von Karman:

$$f=0,25\left[\log_{10}\left(\frac{k}{3,7D}\right)\right]^{-2} \tag{6}$$

onde

k = rugosidade equivalente da parede do conduto (m)

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (5), tem-se:

$$Q=\sqrt{\frac{g\pi^2 D^4\left(Z-H\right)/8}{\frac{L}{4D}\left[\log_{10}\left(\frac{k}{3,7D}\right)\right]^{-2}+K_V}} \tag{7}$$

O reservatório mais alto será sempre ABASTECEDOR e o mais baixo sempre RECEPTOR. Já os reservatórios intermediários poderão ser abastecedores, receptores ou neutros, dependendo da posição da cota piezométrica H no ponto de junção. Logo as incógnitas do problema são: a altura H, o sentido do fluxo nos condutos intermediários, e, por conseguinte, as vazões nos n condutos.

Portanto a Eq. (7) é que governará o escoamento no sistema. Então, considerando as demais perdas singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos comprimentos reais dos condutos, aplicando esta equação aos $\boldsymbol{n}$ condutos, e adotando os índices 1, 2, 3, ... $\boldsymbol{n}$ para cada uma das grandezas acima citadas, utilizadas respectivamente em cada um dos reservatórios, do nível mais alto para o mais baixo, tem-se:

$$Q_1=\sqrt{\frac{g\pi^2 D_1^4\left(Z_1-H\right)/8}{\frac{L_1}{4D_1}\left[\log_{10}\left(\frac{k_1}{3,7D_1}\right)\right]^{-2}+K_{V1}}} \tag{8}$$

$$Q_2=\sqrt{\frac{g\pi^2 D_2^4\left(Z_2-H\right)/8}{\frac{L_2}{4D_2}\left[\log_{10}\left(\frac{k_2}{3,7D_2}\right)\right]^{-2}+K_{V2}}} \tag{9}$$

... ...

$$Q_n=\sqrt{\frac{g\pi^2 D_n^4\left(Z_n-H\right)/8}{\frac{L_n}{4D_n}\left[\log_{10}\left(\frac{k_n}{3,7D_n}\right)\right]^{-2}+K_{Vn}}} \tag{10}$$

Convencionando-se como negativa a vazão que sai da junção (indo para o reservatório receptor) e, consequentemente, como positiva a vazão que chega na junção (vinda do reservatório abastecedor), então, pela equação da continuidade aplicada no ponto de junção dos condutos:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n = 0 \tag{11}$$

A solução do problema, então, consiste na resolução do sistema de $\boldsymbol{n}$+1 equações, (8), (9), ... (10) e (11), e $\boldsymbol{n}$+1 incógnitas, que são Q_1, Q_2, ... Q_n e H. Destas variáveis as $\boldsymbol{n}$ primeiras podem ser eliminadas substituindo-se as Eqs. (8), (9), ... e (10) na Eq. (11), a qual possibilitará a determinação de H. Uma vez encontrada a altura de pressão, com as equações (8), (9), ... e (10) determina-se as vazões Q_1, Q_2, ... e Q_n e o problema estaria resolvido. Vê-se, no entanto, que analiticamente a solução de um sistema desta natureza é algo inviável, uma vez que pode envolver um grande número de equações.

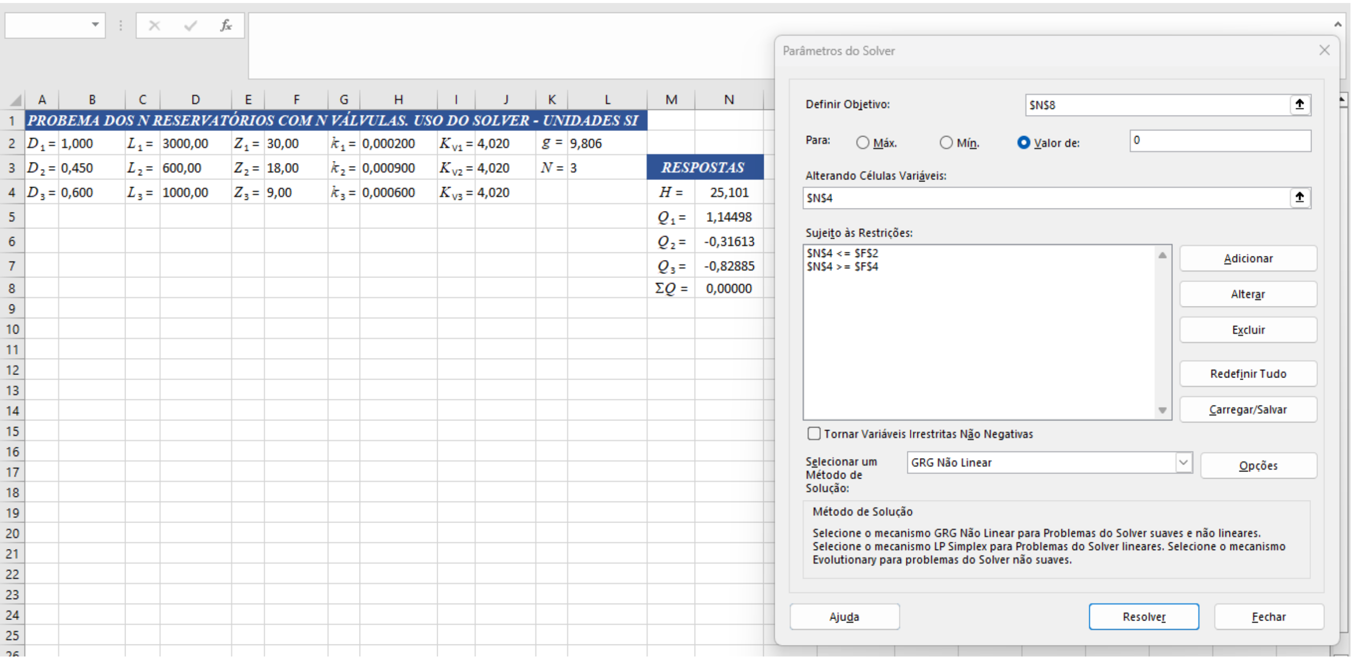
Uma solução plausível pode ser conforme segue:

1 - Admite-se um valor inicial para a altura piezométrica no ponto de junção dos condutos.
2 - Com a altura piezométrica comum a todos os condutos, calcula-se o valor das vazões de cada um deles e substitui-se esses valores na equação da continuidade.
3 - Se a vazão que chega à junção for muito elevada, admite-se um valor maior para a altura piezométrica, o qual reduzirá a vazão que chega e aumentará a vazão que sai.
4 - Repete-se este procedimento até que a soma das vazões no ponto de junção seja nula.

O procedimento acima descrito pode ser ajustado para uso com a conhecida ferramenta "Solver" do Excel, cujo trabalho a ser realizado consiste basicamente em, de forma automática, fazer variar o valor de H, calcular os valores Q_1, Q_2, ... Q_n, sujeitos à restrição $Z_1 \geq H \geq Z_n$, repetidamente, até encontrar o objetivo desejado que é $Q_1+Q_2+\ldots+Q_n=0$.

Apenas deve-se levar em conta que que tendo os reservatórios alturas topográficas distintas, bem como considerando as oscilações de H durante o cálculo, (Z-H) pode resultar em raiz quadrada de um valor negativo, fato este que travaria o cálculo automático, se não observado. Para evitar esse inconveniente, usa-se a função valor absoluto ABS(Z-H) e, posteriormente, para restabelecer o sentido correto de fluxo dentro do conduto, multiplica-se a expressão correspondente à vazão, pela função SINAL(Z-H).

Portanto, abre-se o "Solver" e insere-se a referência à Eq. (8) como célula objetivo na caixa "Definir Objetivo", marcando a opção "Valor de", e adotando para esta opção o valor zero. Na caixa "Alterando Células Variáveis" insere-se a referência à célula destinada a H, partindo de um valor inicial de H, digamos, igual a $(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)/n$. Na caixa "Sujeito às Restrições" insere-se as células fazendo referência a $H \leq Z_1$ e $H \geq Z_n$. Ao se clicar no botão "Resolver", automaticamente o Solver encontrará esses valores e os exibirá. A planilha mostrada adiante, com a solução do sistema aqui apresentado, ilustra bem o procedimento, com os dados e respostas de um problema prático, cujas equações estão no Apêndice.



Por fim, cabe ressaltar a óbvia constatação, à vista da Eq. (7), de que K_V=0 equivale a um conduto com a válvula totalmente aberta ou sem válvula, enquanto que uma válvula totalmente fechada corresponderá a um coeficiente de perda de carga com valor bem elevado, digamos, K_V=10^{12} ou mais. Valores usuais de K_V são mostrados no Apêndice.

Bibliografia:

1 - Camargo, L. "O problema dos N reservatórios com junção comum. Uso do Excel". Vitória, dez/2023. Disponível em http://hidrotec.atspace.co.uk/condufor.htm. Acesso em jan/2024.
2 - Baptista, M. & Lara, M. "Fundamentos de Engenharia Hidráulica", Ed. UFMG, Belo Horizonte, 4ª Edição, 2016.
3 - Evett, J.B & Liu, C. "2500 Solved Problems in Fluid Mechanics and Hydraulics", McGraw-Hill, New York, 1989.
4 - Streeter, V.L. & Wylie, E.B. & Bedford, K.W. "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, New York, 9th Edition, 1998.

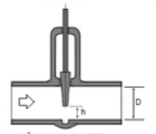
LC, Vitória, jan/2024.

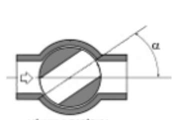
Apêndice.

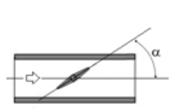
As equações utilizadas no texto, convertidas para a notação do Excel, têm a seguinte forma:

```
Q1 =RAIZ(L2*PI()^2*B2^4*ABS(F2-N4)/8/(D2/4/B2*(LOG10(H2/3,7/B2))^-2+J2))*SINAL(F2-N4)
Q2 =RAIZ(L2*PI()^2*B3^4*ABS(F3-N4)/8/(D3/4/B3*(LOG10(H3/3,7/B3))^-2+J3))*SINAL(F3-N4)
Q3 =RAIZ(L2*PI()^2*B4^4*ABS(F4-N4)/8/(D4/4/B4*(LOG10(H4/3,7/B4))^-2+J4))*SINAL(F4-N4)
ΣQ =N5+N6+N7
```

Valores usuais de K_V são mostrados nas tabelas a seguir:

 VÁLVULA GAVETA	h/D =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	Kv =	∞	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,08	0,95	0,39	0,09	0

 VÁLVULA ESFÉRICA	α° =	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	67
	Kv =	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

 VÁLVULA BORBOLETA	α° =	5	10	15	20	25	30	40	50	60	65	70	90
	Kv =	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	10,8	32,6	118	256	751	∞

Fonte: Batista & Lara, 2016.