FÓRMULA DE COLEBROOK-WHITE: VELHA MAS ACTUAL. SOLUÇÕES EXPLÍCITAS

José Alfeu A. de Sá Marques
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
Tel.: +351.39.410681 • Fax: +351.39.22833 • E-mail: jadm@gemini.ci.uc.pt
3000 COIMBRA - PORTUGAL

Joaquim J. O. Sousa
Instituto Superior de Engenharia do Instituto Politécnico de Coimbra
Tel.: +351.39.7000200 • Fax: +351.39.7000270 • E-mail: jjoseng@sun.isec.pt
3030 COIMBRA - PORTUGAL

1. Introdução

Aquando do processo de desenvolvimento de ferramentas informáticas para obtenção do equilíbrio hidráulico em sistemas de distribuição de água, os autores deste trabalho sempre se debateram com uma questão de base: "Qual a lei de resistência ao escoamento a incorporar nos modelos matemáticos a desenvolver?".

Como é do conhecimento geral, a lei de resistência mais comummente citada na literatura da especialidade e a ter uma vasta aplicação prática por parte dos técnicos ligados à mecânica dos fluidos é a fórmula de Colebrook-White. Apesar de já ter surgido há 58 anos (1939), continua a ser considerada a que mais se aproxima da realidade física dos escoamentos, sendo-lhe atribuídos erros entre 3 e 5%, o que, dentro do seu campo de aplicação, é considerado bastante bom.

No entanto, esta equação apresenta uma característica que a torna pouco atractiva. Devido à sua forma, não é possível expressar explicitamente o factor de resistência em função das restantes grandezas envolvidas no cálculo do mesmo.

Para ultrapassar este inconveniente, diversos investigadores desenvolveram esforços no sentido de obterem expressões que, sendo explícitas, reproduzissem com algum rigor os valores do factor de resistência estimados pela fórmula de Colebrook-White.

2. A origem da fórmula de Colebrook-White

Em 1932 e 1933, Nikuradse desenvolveu várias experiências com o objectivo de estudar os regimes de escoamento em condutas. Estas experiências foram orientadas por Prandtl e von Karman e consistiram na determinação de perdas de carga contínuas provocadas por escoamentos no interior de condutas circulares com rugosidade artificial. Nas experiências realizadas as condutas eram materializadas por tubos de vidro e a rugosidade artificial era conseguida colando-se grãos de areia às paredes desses tubos. Por sua vez, os grãos de areia eram seleccionados por forma a obter rugosidades uniformes.

Ao dispôr os resultados obtidos nas suas experiências num diagrama em que figurava o logaritmo do factor de resistência em função do logaritmo do número de Reynolds, Nikuradse observou que existiam três regimes bem distintos:

- o regime laminar, em que o factor de resistência (λ) depende apenas do número de Reynolds (Re), existindo uma relação linear entre ambas as grandezas expressa pela fórmula de **Hagen-Poiseille** (1856):

$$\log\lambda = -\log R_e + \log 64 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{64}{R_e} \qquad (1)$$

- o regime turbulento liso, no qual o factor de resistência continua a depender unicamente do número de Reynolds. Nikuradse (1932) confirmou que a relação entre ambos era correctamente definida pela fórmula de **Prandtl-von Karman**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(R_e\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \qquad (2)$$

- o regime turbulento rugoso, caracterizado pelo facto de o factor de resistência ser independente do número de Reynolds e depender apenas da rugosidade relativa (quociente entre a rugosidade absoluta e o diâmetro da conduta - ε/D) sendo a relação de dependência expressa pela fórmula de **von Karman** (1930):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(\frac{D}{\varepsilon}\right) + 1{,}14 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7\,D}\right) \qquad (3)$$

sendo estes regimes separados por regimes de transição:

- o regime de transição laminar-turbulento, em que o factor de resistência tem um comportamento instável;
- o regime de transição turbulento liso-turbulento rugoso, em que o factor de resistência depende simultaneamente do número de Reynolds e da rugosidade relativa;

não existindo na altura expressões matemáticas que definissem o comportamento destas transições.

Mais tarde, em 1937, Colebrook e White desenvolveram experiências em condutas comerciais, com o objectivo de estudar a transição entre o regime turbulento liso e o regime turbulento rugoso. Como resultado do estudo empreendido, chegaram à conclusão de que adicionando o argumento da função logaritmo da fórmula de Prandtl-von Karman (regime turbulento liso) ao argumento da função logaritmo da fórmula de von Karman (regime turbulento rugoso) obtinha-se uma expressão que, em todo o domínio dos escoamentos turbulentos, traduzia com bastante rigor (erros de 3 a 5%) os valores obtidos nas experiências realizadas, surgindo assim aquela que é hoje vulgarmente conhecida por fórmula de **Colebrook-White** (1939):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \qquad (4)$$

Nesta expressão, devido ao facto de os materiais que constituem as paredes das condutas comerciais não terem rugosidade uniforme, o parâmetro caracterizador da rugosidade de Nikuradse (ε) foi substituido por uma rugosidade equivalente (k), a qual, para cada tipo de material utilizado, deverá ser determinada experimentalmente a partir de medições de perda de carga.

3. A explicitação da fórmula de Colebrook-White ao longo dos tempos

Da simples observação da fórmula de Colebrook-White, facilmente se depreende que esta não permite explicitar o factor de resistência em função das restantes grandezas envolvidas no seu cálculo. Como consequência deste facto, tornava-se imperativo o recurso a processos numéricos de cada vez que se desejasse calcular λ.

Para evitar este inconveniente, com base nas fórmulas de Hagen-Poiseille e de Colebrook-White, Moody (1944) desenvolveu um ábaco que permitia facilmente determinar λ em função do número de Reynolds e da rugosidade relativa (o célebre Ábaco de Moody). Apesar deste avanço, Moody achava que o ideal seria obter uma expressão que permitisse explicitar λ. Determinado a conseguir tal proeza, desenvolveu trabalhos nesse sentido, até que, em 1947, surgiu a fórmula de **Moody**:

$$\lambda = 0{,}0055\left[1+\left(20000\frac{k}{D}+\frac{10^6}{R_e}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \tag{5}$$

Esta fórmula era válida nos limites $4x10^3 \leq Re \leq 10^8$ e $0<k/D<5x10^{-2}$ e apresentava desvios, relativamente à fórmula de Colebrook e White, da ordem dos $\pm15\%$.

Em 1966, foi a vez de **Wood** apresentar uma outra forma de explicitar λ:

$$\lambda = a + b\,R_e^{-c} \tag{6}$$

na qual: $a = 0{,}094\left(\frac{k}{D}\right)^{0,225} + 0{,}53\left(\frac{k}{D}\right)$ $\quad b = 88{,}0\left(\frac{k}{D}\right)^{0,44}$ $\quad c = 1{,}62\left(\frac{k}{D}\right)^{0,134}$

desta feita, uma expressão bastante complexa, a qual, no interior do domínio definido por $Re>10000$ e $10^{-5}<k/D<0{,}04$, apresentava desvios da ordem de $\pm5\%$.

Dois anos mais tarde, em 1968, é publicado um livro da autoria de Nékrasov em que é apresentada uma expressão, com desvios de ordem de grandeza equivalente aos da fórmula de Moody, sendo a sua autoria atribuida a **Altshul**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1{,}8\,\log\left(\frac{k}{10\,D}+\frac{7}{R_e}\right) \tag{7}$$

Em 1972, **Barr** substituiu, na fórmula de Colebrook-White, a fórmula de Prandtl-von Karman por uma aproximação explícita e obteve uma nova expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\,\log\left(\frac{k}{3{,}7\,D}+\frac{5{,}15}{R_e^{0,892}}\right) \tag{8}$$

sugerindo mais tarde (1975) que se substituissem os valores 5,15 e 0,892 por 5,1286 e 0,89, respectivamente, conseguindo uma expressão com desvios entre -0,8 e 3%.

Churchill (1973), seguindo as pisadas de Barr, fez uso da expressão desenvolvida por Nikuradse (1932), já anteriormente utilizada por Altshul que a atribuíu a Konakov:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1{,}8 \log\left(\frac{7}{R_e}\right) \tag{9}$$

obtendo outra expressão simples e bastante precisa (desvios entre -0,6 e 3,4%):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} + \left(\frac{7}{R_e}\right)^{0{,}9}\right] \tag{10}$$

Três anos mais tarde, **Swamee e Jain** (1976) publicam um trabalho em que propõem a seguinte expressão (desvios entre -0,7 e 3,4%):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{5{,}74}{R_e^{0{,}9}}\right) \tag{11}$$

não sendo mais do que a fórmula de Churchill em que $7^{0,9}$=5,76 é substituido por 5,74.

Em 1979, **N. H. Chen** apresentou a sua versão de explicitação da fórmula de Colebrook-White. A expressão apresentada reproduzia fielmente os valores do factor de resistência em todo o domínio dos escoamentos turbulentos (desvios relativos inferiores a ±0,3%). No entanto, o seu aspecto não era muito atraente:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7065\,D} - \frac{5{,}0452}{R_e} \log\left(\frac{1}{2{,}8257}\left(\frac{k}{D}\right)^{1{,}1098} + \frac{5{,}8506}{R_e^{0{,}8981}}\right)\right] \tag{12}$$

Um ano depois, ao analisar a fórmula de Altshul, **Round** (1980) verificou que esta poderia ser melhorada, especialmente para valores elevados do parâmetro (k/D). Para tal, introduziu-lhe ligeiras modificações e obteve uma expressão que produzia aproximações ligeiramente melhores para o factor de resistência:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1{,}8 \log\left(0{,}135\,\frac{k}{D} + \frac{6{,}5}{R_e}\right) \tag{13}$$

Em 1980 **Barr** reaparece propondo uma expressão algo complexa:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{5{,}02 \log\left(R_e / 4{,}518 \log\left(R_e\ 7\right)\right)}{R_e\left(1 + R_e^{0{,}52}\left(k\ D\right)^{0{,}7} / 29\right)}\right] \tag{14}$$

sugerindo mais tarde (1981) que esta fosse substituida por uma outra mais simples:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{4{,}518 \log\left(R_e\ 7\right)}{R_e\left(1 + R_e^{0{,}52}\left(k\ D\right)^{0{,}7} / 29\right)}\right) \tag{15}$$

com desvios relativos inferiores a ±0,5%.

Ainda em 1980, **Malafaya-Baptista** melhorou a expressão de Barr (1975) e utilizou-a na fórmula de Colebrook-White como aproximação inicial, obtendo uma expressão com erros relativos inferiores a ±0,15% :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} - \frac{5{,}02}{R_e} \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{R_e} \frac{1}{0{,}49\,R_e^{-0{,}11} + 0{,}18\,R_e^{0{,}1}(k\ D)^{0{,}6}}\right)\right] \quad (18)$$

Zigrang e Sylvester (1982), fazendo uso da técnica das aproximações sucessivas, apresentam uma expressão com desvios relativos inferiores a 0,12%:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} - \frac{5{,}02}{R_e} \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} - \frac{5{,}02}{R_e} \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{13}{R_e}\right)\right)\right] \quad (16)$$

Em 1983, **Haaland** propõe uma expressão que, de entre as mais simples, é a mais rigorosa (desvios relativos inferiores a ±1,5%):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1{,}8 \log\left[\left(\frac{k}{3{,}7\,D}\right)^{1{,}11} + \frac{6{,}9}{R_e}\right] \quad (17)$$

J. J. J. Chen apercebeu-se de que λ varia aproximadamente com $(k/D)^{0{,}3}$. Associando esta conclusão à equação de Blasius para o regime turbulento liso:

$$\lambda = 0{,}3164\,R_e^{-0{,}25} \quad (19)$$

em 1984, propõe uma expressão relativamente simples:

$$\lambda = 0{,}3164\left(0{,}11\frac{k}{D} + \frac{1}{R_e^{0{,}83}}\right)^{0{,}3} \quad (20)$$

que apresenta desvios da ordem de ±8%. Um ano depois (1985), o mesmo autor sugere uma expressão mais precisa (desvios entre -0,3 e 2,6%):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{4{,}52}{R_e} \log\left(\frac{R_e}{7}\right)\right] \quad (21)$$

resultado de se considerar, na fórmula de Colebrook-White, como primeira aproximação para λ o valor dado por uma outra forma da equação de Blasius:

$$\lambda = 0{,}184\,R_e^{-0{,}2} \quad (22)$$

Por fim, em 1988, **Nackab** desenvolveu uma expressão explícita que se aproximava bastante à fórmula de Prandtl-von Karman para o regime turbulento liso. Seguindo os passos de J. J. Chen, introduziu a sua própria aproximação na fórmula de Colebrook-White e obteve a seguinte expressão (desvios entre -1 e 3%):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{0{,}4\,R_e^{-0{,}3} + 0{,}0053}}\right] \quad (23)$$

4. Explicitação proposta

Em 1996, **Sousa e Sá Marques** efectuaram uma pesquisa na esperança de encontrar na bibliografia da especialidade uma expressão que reproduzisse fielmente os resultados da fórmula de Colebrook-White, fosse simples e ao mesmo tempo explícita. Após analisarem as expressões encontradas ao longo da pesquisa, observaram que existiam dois tipos: expressões simples que produzem desvios consideráveis e expressões bastante rigorosas mas relativamente complexas. Foi então que decidiram empreender esforços no sentido de chegarem a uma expressão com as características desejadas. O primeiro passo realizado foi estudar a forma como os diversos autores construiram as suas expressões e quantificar os desvios produzidos por cada uma delas. Quanto à forma como os autores construiram as suas expressões, de entre as mais rigorosas, concluiu-se que existem duas distintas:

i) reconstrução da fórmula de Colebrook-White substituindo a fórmula de Prandtl-von Karman, para o regime turbulento liso, por uma aproximação explícita (fórmula de Nikuradse, fórmula de Blasius, ou outra) e posterior calibração da expressão obtida;

ii) resolução numérica da fórmula de Colebrook-White, partindo de uma expressão que proporciona uma estimativa inicial e efectuando uma ou mais iterações.

As expressões obtidas pela forma i), regra geral, são simples e apresentam desvios relativos máximos da ordem dos 3%. Por sua vez, as expressões obtidas por resolução numérica são mais complexas, mas os desvios relativos máximos produzidos são inferiores a 0,5%.

Os primeiros trabalhos realizados foram no sentido de obter uma expressão pela primeira forma descrita. No entanto, foram infrutíferos já que não se conseguiu obter uma expressão que, com a mesma simplicidade, fosse mais rigorosa que a fórmula de Haaland. Por fim optou-se pela forma iterativa mas com o objectivo de obter uma expressão que, face às já existentes, fosse mais simples. Ao fim de inúmeras tentativas, chegou-se à conclusão de que a expressão mais rigorosa era a que se obtinha considerando a aproximação inicial:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{5}{R_e^{0{,}89}}\right) \tag{24}$$

por sinal, bastante semelhante à fórmula de Barr (1975), resultando a seguinte expressão final:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} - \frac{5{,}02}{R_e} \log\left(\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{5}{R_e^{0{,}89}}\right)\right] \tag{25}$$

correspondendo-lhe um desvio relativo máximo inferior a 0,2%, podendo-se visualizar, na figura 1, a perfeita concordância entre a expressão proposta e a fórmula de Colebrook-White.

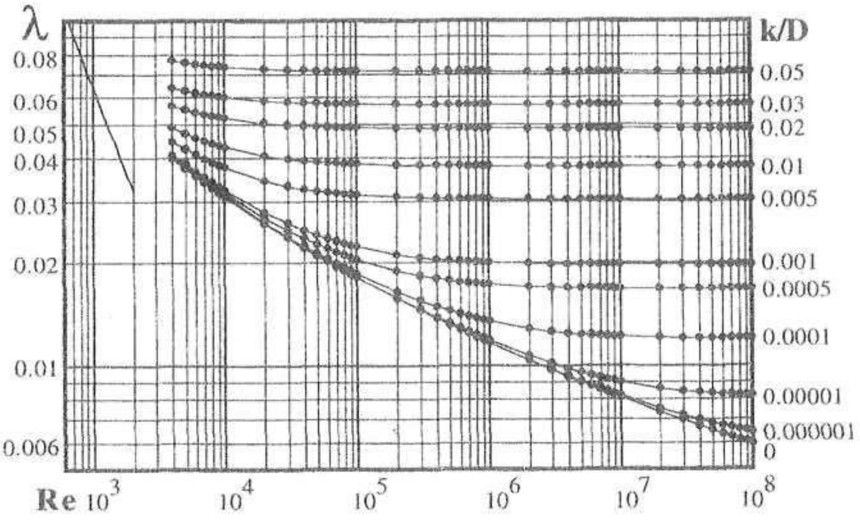

Fig. 1 - Concordância entre a expressão proposta (pontos) e a fórmula de Colebrook-White (linhas).

5. Conclusões

Após realizar este trabalho os autores concluem que hoje em dia existem várias expressões que, sendo explícitas, reproduzem com bastante rigor os valores do factor de resistência estimados pela fórmula de Colebrook-White, pelo que, a utilização desta é perfeitamente desnecessária.

De entre as diversas expressões que se encontram neste trabalho sugere-se o seguinte:

1. quando se exigir uma expressão que reproduza fielmente os valores da fórmula de Colebrook-White, aconselha-se o uso da expressão proposta neste trabalho, Eq. 25 (desvios relativos inferiores a ±0,2%);
2. se o objectivo é uma expressão simples e não é exigido tanto rigor, aconselha-se o uso da fórmula de Haaland, Eq. 17 (desvios relativos inferiores a ±1,5%).

6. Referências bibliográficas

BARR, D. I. H. (1972) - *New forms of equations for the correlation of pipe resistance data*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 53, pp. 383-390.

BARR, D. I. H. (1975) - *Two additional methods of direct solution of the Colebrook-White function*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 59, pp. 827-835.

BARR, D. I. H. (1980) - *The transition from laminar to turbulent flow*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 69, pp. 555-562.

BARR, D. I. H. (1981) - *Solutions of the Colebrook-White function for resistance to uniform turbulent flow*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 71, pp. 529-535.

CHEN, J. J. J. (1984) - *A simple explicit formula for the estimation of pipe friction factor*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 77, pp. 49-55.

CHEN, J. J. J. (1985) - *Systematic explicit solutions of the Prandtl and Colebrook-White equations for pipe flow*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 79, pp. 383-389.

CHEN, N. H. (1979) - *An explicit equation for friction factor in pipe*, Ind. Eng. Chem. Fund., A. C. S., Vol. 18, No. 3, pp. 296-297.

CHURCHILL, S. W. (1973) - *Empirical expressions for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe*, Am. Inst. Ch. Engrs. J., Vol. 19, No. 2, pp. 375-376.

COLEBROOK, C. F. (1939) - *Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws*, J. Instn. Civ. Engrs., 11, pp. 133-156.

HAALAND, S. E. (1983) - *Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow*, J. Fluids Eng. Trans. ASME, 105, pp. 89-90.

MALAFAYA-BAPTISTA, M. (1980) - *Critérios de explicitação da expressão de Colebrook-White. Novas perspectivas*, Laboratório de Hidráulica, FEUP.

MOODY, L. F. (1947) - *An approximate formula for pipe friction factors*, Mech. Engng., New York, 69, pp. 1005-1006.

NACKAB, J. (1988) - *Calcul direct, sans iteration, de la perte de charge en conduite par la formule de Colebrook*, La Houille Blanche, N° 1, pp. 61.

NEKRASOV, B. (1968) - *Hydraulics*, Peace Publishers, Moscow, pp. 95-101.

ROUND, G. F. (1980) - *An explicit approximation for the friction factor-Reynolds number relation for rough and smooth pipes*, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 58, pp. 122-123.

SWAMEE, P. K. e JAIN, A. K. (1976) - *Explicit equations for pipe-flow problems*, Journal of the Hydraulics Division, A.S.C.E., Vol. 102, No. HY5, pp. 657-664.

WHITE, C. M. e COLEBROOK, C. F. (1937) - *Fluid friction in roughened pipes*, Proc. Roy. Soc. A., 161, pp. 367-381.

WOOD, D. J. (1966) -*An explicit friction factor relationship*, Civ. Engng, Am. Soc. Civ. Engrs., 36, N° 12, pp. 60-61.

ZIGRANG, D. J. e SYLVESTER, N. D. (1982) - *Explicit approximations to the solution of Colebrook's friction factor equation*, Am. Inst. Ch. Engrs. J., Vol. 28, No. 3, pp. 514-515.