Equações Explícitas Para o Fator de Atrito de Darcy-Weisbach

Eng. Luiz Camargo

Quando um líquido escoa de um ponto para outro no interior de um tubo, gerará sempre uma perda de energia, denominada perda de pressão ou perda de carga. Esta perda de energia é devido ao atrito com as paredes do tubo e devida à viscosidade do líquido em escoamento. Portanto quanto maior for a rugosidade da parede da tubulação e mais viscoso for o líquido, maior será a perda de carga.

Com o intuito de estabelecer leis que possam reger as perdas de carga em condutos, já há cerca de dois séculos estudos e pesquisas vem sendo realizados. Atualmente a expressão mais precisa e utilizada universalmente para análise de escoamento em tubos, e que foi proposta em 1845, é a conhecida equação de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\cdot\frac{V^2}{2g}$$

onde:

h_f = perda de carga ao longo do comprimento do tubo (mca)
f = fator de atrito de Darcy-Weisbach (adimensional)
L = comprimento do tubo (m)
V = velocidade do líquido no interior do tubo (m/s)
D = diâmetro interno do tubo (m)
g = aceleração da gravidade local (m/s^2)

Mas não se encontrou logo uma maneira segura para determinação do fator de atrito. Somente em 1939, quase 100 anos depois, é que se estabeleceu definitivamente uma lei para fator de atrito $\boldsymbol{f}$, através da equação de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{f}}\right)$$

em que:

k = rugosidade equivalente da parede do tubo (m)
R_e = número de Reynolds (adimensional)

A equação de Colebrook-White tem sido considerada como a mais precisa lei de resistência ao escoamento e vem sendo utilizada como padrão referencial. Mas, apesar disto, e de todo o fundamentalismo e embasamento teórico agregado à mesma, tem uma particularidade a alguns pouco conveniente: é implícita em relação ao fator de atrito, ou seja, a grandeza $\boldsymbol{f}$ está presente nos dois membros da equação, sem possibilidade de ser explicitada em relação às demais grandezas. Sua resolução requer um processo iterativo.

Isto resultou em motivos para que muitos pesquisadores, de quase toda parte do mundo, se empenhassem em encontrar equações explícitas, que pudessem ser utilizadas como alternativas à equação de Colebrook-White. Algumas mais compactas e simples, mais fáceis de serem memorizadas, contudo com grandes desvios; outras, menos compactas e complexas, mais difíceis de serem memorizadas, porém com desvios menores; outras tantas combinando simplicidade e precisão, com erros até bem reduzidos, em relação ao fator de atrito calculado com a equação de Colebrook-White.

No presente trabalho selecionamos e apresentamos a seguir um pequeno conjunto destas equações explícitas, considerando apenas aquelas que pesquisadores, conforme bibliografia consultada, avaliaram e concluíram terem os menores erros em relação à equação de Colebrook-White:

1- Sousa-Cunha-Marques (1999):
(Erro: 0,123%)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left[\frac{k}{3.7D} - \frac{5.16}{R_e}\log_{10}\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.09}{R_e^{0.87}}\right)\right]$$

2- Haaland (1983):
(Erro: 0,220%)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log_{10}\left[\left(\frac{k}{3.7D}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{R_e}\right]$$

3- Barr (1972):
(Erro: 0,375%)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.15}{R_e^{0.892}}\right)$$

4- Swamee-Jain (1976):
(Erro: 0,386%)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.74}{R_e^{0.9}}\right)$$

5- Churchill (1973):
(Erro: 0,393%)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left[\frac{k}{3.7D} + \left(\frac{7}{R_e}\right)^{0.9}\right]$$

Não se pode dizer que seja uma banalização, mas usando o mesmo critério de alguns autores, daria aqui até para propor, sem maiores dificuldades, outras equações explícitas:

6- Camargo-Barr-Colebrook-White (2001):
(substituição da eq. de Barr na eq. de Colebrook)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left[\frac{k}{3.7D} - \frac{5.02}{R_e}\log_{10}\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.15}{R_e^{0.892}}\right)\right]$$

7- Camargo-Swamee-Jain-Colebrook-White (2001):
(substituição da eq. de Swamee-Jain na eq. de Colebrook)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left[\frac{k}{3.7D} - \frac{5.02}{R_e}\log_{10}\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.74}{R_e^{0.9}}\right)\right]$$

A conclusão é que, por mais simples ou compactas que possam ser estas equações explícitas, as mesmas requerem algum esforço computacional com operações matemáticas de potenciação, radiciação, logarítmicas, etc. Contudo, tendo em vista as elevadas velocidades dos processadores dos computadores atuais, praticamente será imperceptível a diferença no esforço computacional do cálculo feito com uma equação implícita e com uma equação explícita. E então, se a trabalheira é a mesma, parece ser mais razoável se usar a equação de Colebrook-White.

Bibliografia Consultada:

- Camargo, L.A.; "Análise de escoamento em condutos forçados. Uso das equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White". Web-site HidroTec Calculador (http://hidrotec.atspace.co.uk), Mai/2001.

- Davidson, J.W. et al.; "Approximators for the Colebrook-White formula obtained through a hybrid regression method", School of Engrg. and Computer Science, Univ. of Exeter, UK, 1999.

- Sousa, J. et al; "An explicit solution of the Colebrook-White equation through simulated annealing", Water industry systems: modelling, optimization and applications, vol. 2, Baldock, England, Research Studies Press, 1999.

LC, Vitória, jun/2001