Escoamento em condutos parcialmente cheios.
Algumas demonstrações.

Eng° Luiz Camargo

- A vazão máxima ocorre para h/D = 0,94.
- A vazão sob h/D = 1 é 0,93 vezes a vazão máxima, onde h/D = 0,94.
- A vazão para h/D = 0,82 é igual à vazão para h/D = 1.
- Portanto no cálculo de θ poderá haver duas soluções e, por conseguinte, dois valores para h/D.
- Valores de θ que conduzem à solução única, limitam-se, portanto, a θ < 4,53 radianos, isto é, h/D < 0,82.

A eq. (1) é a equação de Manning em unidades SI. Levando as eqs. (2) e (3) na eq. (1) encontra-se a eq. (6). Com $Q=AV$ encontra-se a eq. (10). As eqs. (6) e (10) abaixo, deduzidas a partir da equação de Manning, mostram que para n, D e I constantes, a vazão e a velocidade só dependem do ângulo θ e, portanto, de h/D, sendo I a declividade, R_h o raio hidráulico, A a área molhada e n o coeficiente de rugosidade de Manning.

Derivando as equações (6) e (10) em relação a θ e igualando a zero, chega-se a:

$Q = Q_{max}$, quando θ = 5,278197 radianos (θ = 302,5º), que corresponde a h/D = 0,94.
$V = V_{max}$, quando θ = 4,493409 radianos (θ = 257º), que corresponde a h/D = 0,81.

$$Q = \frac{A}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad (1)$$

$$V = \frac{1}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad (1a)$$

$$A = \frac{D^2}{8}(\theta - sen\theta) \qquad (2)$$

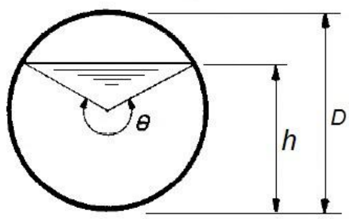
$$R_h = \frac{D}{4} \cdot \frac{(\theta - sen\theta)}{\theta} \qquad (3)$$

$$\theta = 2 \cdot cos^{-1}\left(1 - \frac{2h}{D}\right) \qquad (4)$$

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}}\right)^{1/3} \cdot \left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} \cdot I^{1/2} \qquad (6)$$

$$V = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \cdot \left[\frac{\theta - sen\theta}{\theta}\right]^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad (10)$$

$$h / D = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (13)$$



Conduto de seção circular parcialmente cheio.

1) A vazão máxima ocorre quando *h/D* = 0,94.

Derivando a eq. (6), de Manning, em relação a θ e igualando a zero, chega-se a $Q = Q_{max}$. Daí chega-se a θ, e daí a *h/D*.

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}} \right)^{1/3} \cdot \left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2} \right]^{1/3} \cdot I^{1/2}$$

$$\frac{dQ}{d\theta} = \left(\frac{I}{n^2} \right)^{1/2} \left(\frac{D^8}{2^{13}} \right)^{1/3} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2} \right]^{1/3} = 0$$

Pelo Wolfram-Alpha obtém-se:

$$\frac{dQ}{d\theta} = \left(\frac{I}{n^2} \right)^{1/2} \left(\frac{D^8}{2^{13}} \right)^{1/3} \cdot \left[-\frac{(\theta - sen\theta)^4 \cdot (-3\theta - 2sen\theta + 5\theta \cos\theta)}{3\theta^3 \left(\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2} \right)^{2/3}} \right] = 0$$

$$(\theta - sen\theta)^4 \cdot (-3\theta - 2sen\theta + 5\theta \cos\theta) = 0$$

$$5\theta \cos\theta - 2sen\theta - 3\theta = 0$$

Resolvendo pelo aplicativo Mathematica ou pelo método iterativo de Newton obtém-se:

θ = 5,278197 radianos (é o ângulo que substituído na eq. (6) dará a vazão máxima no conduto).

Da eq. (13) vem:

$$h / D = \frac{1}{2} \left[1 - cos\left(\frac{5{,}278197}{2} \right) \right]$$

h/D = 0,938 ≅ 0,94

⇒ **Portanto a vazão máxima ocorre quando *h/D* ≅ 0,94.**

c.q.d.

Nota: fazendo os mesmos cálculos com a equação de Chezy, encontra-se θ = 5,3784 radianos, o que dá *h/D* = 0,95.

1a) A vazão máxima ocorre quando *h/D* = 0,94 (outra demonstração).

Da eq. (1), de Manning, sendo *n* e *I* constantes, *Q* é máximo quando $AR_h^{2/3}$ for máximo.

Portanto derivando-se $AR_h^{2/3}$ em relação a θ e igualando a zero, chega-se a $Q = Q_{max}$, daí chega-se a θ e daí a *h/D*.

$$\frac{d}{d\theta}\left(AR_h^{2/3}\right) = 0$$

Pelo Wolfram-Alpha obtém-se:

$$R_h^{2/3} \cdot \frac{dA}{d\theta} + \frac{2}{3} \cdot \frac{A}{R_h^{1/3}} \cdot \frac{dR_h}{d\theta} = 0$$

Como:

$$A = \frac{D^2}{8}\left(\theta - sen\theta\right) \quad \text{(eq. 2)}$$

$$R_h = \frac{D}{4} \cdot \frac{\left(\theta - sen\theta\right)}{\theta} \quad \text{(eq. 3)}$$

Pelo Wolfram-Alpha tem-se:

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{D^2}{8}\left(1 - cos\,\theta\right)$$

$$\frac{dR_h}{d\theta} = \frac{D}{4} \cdot \frac{\left(sen\theta - \theta\,cos\,\theta\right)}{\theta^2}$$

Substituindo valores, vem:

$$\left[\frac{D}{4} \cdot \frac{\left(\theta - sen\theta\right)}{\theta}\right]^{2/3} \cdot \left[\frac{D^2}{8}\left(1 - cos\,\theta\right)\right] + \frac{2}{3} \cdot \frac{\left[\frac{D^2}{8}\left(\theta - sen\theta\right)\right]}{\left[\frac{D}{4} \cdot \frac{\left(\theta - sen\theta\right)}{\theta}\right]^{1/3}} \cdot \left[\frac{D}{4} \cdot \frac{\left(sen\theta - \theta\,cos\,\theta\right)}{\theta^2}\right] = 0$$

$$\left(\theta - sen\theta\right) \cdot \left(1 - cos\,\theta\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\theta - sen\theta\right) \cdot \left[\frac{\left(sen\theta - \theta\,cos\,\theta\right)}{\theta}\right] = 0$$

Resolvendo pelo aplicativo Mathematica ou pelo método iterativo de Newton obtém-se:

θ = 5,278107 radianos (é o ângulo que substituído na eq. (6) dará a vazão máxima no conduto).

Da eq. (13) vem:

$$h / D = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{5{,}278107}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{h/D = 0{,}938 \cong 0{,}94}}$$

⇒ **Portanto a vazão máxima ocorre quando *h/D* ≅ 0,94.**

c.q.d.

1b) A vazão máxima ocorre quando *h/D* = 0,94 (mais uma demonstração).

Da eq. (1), de Manning, com $R_h = A/P$, sendo P o perímetro molhado, tem-se:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot A^{5/3} \cdot P^{-2/3} \cdot I^{1/2}$$

Do cálculo diferencial, Q máx. ocorre quando $dQ/d\theta = 0$. Sendo n e I constantes, esta condição implica em que:

$$\frac{d}{d\theta}\left(A^{5/3} \cdot P^{-2/3}\right) = 0$$

Pelo Wolfram-Alpha obtém-se:

$$5P \cdot \frac{dA}{d\theta} - 2A \cdot \frac{dP}{d\theta} = 0$$

Como:

$$A = \frac{D^2}{8}\left(\theta - sen\theta\right)$$

$$P = \frac{D}{2}\theta$$

Pelo Wolfram-Alpha tem-se:

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{D^2}{8}\left(1 - cos\,\theta\right)$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{D}{2}$$

Substituindo valores, e simplificando com o Wolfram-Alpha vem:

$$5\frac{D}{4}\theta \cdot \frac{D^2}{8}\left(1 - cos\,\theta\right) - 2\frac{D^2}{8}\left(\theta - sen\theta\right) \cdot \frac{D}{2} = 0$$

$$3\theta - 5\theta cos\,\theta + 2sen\theta = 0$$

Resolvendo com o aplicativo Mathematica ou pelo método iterativo de Newton obtém-se:

θ = 5,278107 radianos (é o ângulo que substituído na eq. (6) dará a vazão máxima no conduto).

Da eq. (13) vem:

$$h/D = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{5{,}278107}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{h/D = 0{,}938 \cong 0{,}94}}$$

⇒ **Portanto a vazão máxima ocorre quando *h/D* ≅ 0,94.**

c.q.d.

2) A velocidade máxima ocorre quando *h/D* = 0,81.

Derivando a eq. (10) em relação a θ e igualando a zero, chega-se a $V = V_{max}$.

$$V = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \cdot \left[\frac{\theta - sen\theta}{\theta}\right]^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \left(\frac{I}{n^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \cdot \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\theta - sen\theta}{\theta}\right]^{2/3} = 0$$

Pelo Wolfram-Alpha obtém-se:

$$\left(\frac{I}{n^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{1 - cos\,\theta}{\theta} - \frac{\theta - sin\theta}{\theta^2}\right)}{3 \cdot \left(\frac{\theta - sen\theta}{\theta}\right)^{1/3}} = 0$$

$$\frac{1 - cos\,\theta}{\theta} - \frac{\theta - sin\theta}{\theta^2} = 0$$

Resolvendo pelo método iterativo de Newton-Raphson ou pelo aplicativo Wolfram-Alpha obtém-se:

θ = 4,493409 radianos (é o ângulo que substituído na eq. (10) dará a velocidade máxima no conduto).

Da eq. (13) vem:

$$h / D = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{4{,}493409}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{h/D = 0{,}813 \cong 0{,}81}$$

⇒ **Portanto a velocidade máxima ocorre quando *h/D* ≅ 0,81.**

c.q.d.

3) A vazão para *h/D* = 0,82 é a mesma para *h/D* = 1.

- Se *h/D* = 0,82 então da eq. (4) tem-se:

$$\theta = 2 \cdot cos^{-1}(1 - 2 \times 0{,}82) = 4{,}530589185 \text{ rad.}$$

- Se *h/D* = 1 então da eq. (4) tem-se:

$$\theta = 2 \cdot cos^{-1}(1 - 2 \times 1) = 2\pi \text{ rad.}$$

- Se a vazão para *h/D* = 0,82 é a mesma para *h/D* = 1, então da eq. (6) tem-se:

a) Para *h/D* = 0,82, isto é, θ = 4,530589185 radianos:

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(4{,}530589185 - sen4{,}530589185)^5}{4{,}530589185^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(4{,}530589185 + 0{,}983519882)^5}{20{,}52623836}\right]^{1/3}$$

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = [248{,}3518461]^{1/3} = 6{,}28573109$$

b) Para *h/D* = 1, isto é, θ = 2π radianos:

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(2\pi - sen(2\pi))^5}{(2\pi)^2}\right]^{1/3} = \left[(2\pi)^3\right]^{1/3} = 2\pi$$

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = 6{,}28318531$$

$$\boxed{\mathbf{6{,}28573109 \cong 6{,}28318531}}$$

$\Rightarrow$ **Portanto, a vazão para *h/D* = 0.82 é aproximadamente a mesma para *h/D* = 1**.

c.q.d.

3a) A vazão para *h/D* = 0,82 é a mesma para *h/D* = 1 (outra demonstração).

Considerando a eq. (1) de Manning:

$$Q = \frac{A}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

Considerando diferentes valores de *h/D* porém com a mesma vazão, então, se *n* e *I* são constantes, tem-se:

$$A_1 \cdot R_{h1}^{2/3} = A_2 \cdot R_{h2}^{2/3}$$

onde:

$$A = \frac{D^2}{8}(\theta - sen\theta)$$

$$R_h = \frac{D}{4} \cdot \frac{(\theta - sen\theta)}{\theta}$$

Sendo que, de um lado, com *h/D* = 0,82, o ângulo central é θ. E do outro, com *h/D* = 1, o ângulo é 2π.

Substituindo valores:

$$\frac{D^2}{8}(\theta - sen\theta) \cdot \left[\frac{D}{4} \cdot \frac{(\theta - sen\theta)}{\theta}\right]^{2/3} = \frac{D^2}{8}(2\pi - sen2\pi) \cdot \left[\frac{D}{4} \cdot \frac{(2\pi - sen2\pi)}{2\pi}\right]^{2/3}$$

$$(\theta - sen\theta) \cdot \left[\frac{(\theta - sen\theta)}{\theta}\right]^{2/3} = (2\pi - sen2\pi) \cdot \left[\frac{(2\pi - sen2\pi)}{2\pi}\right]^{2/3}$$

$$(\theta - sen\theta) \cdot \left[\frac{(\theta - sen\theta)}{\theta}\right]^{2/3} = 2\pi$$

Resolvendo pelo aplicativo Wolfram-Alpha obtém-se:

θ = 4,528660945... rad.

Da eq. (13) vem:

$$h / D = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{4{,}528660945}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\textbf{h/D = 0,8196} \cong \textbf{0,82}}$$

⇒ **Portanto, a vazão para *h/D* = 0.82 é aproximadamente a mesma para *h/D* = 1**.

c.q.d.

4) A vazão sob *h/D* = 1 é 0,93 vezes a vazão máxima.

A vazão máxima ocorre quando *h/D* = 0,94 (demonstrado acima).

a) Para *h/D* = 0,94, da eq. (4) tem-se:

$$\theta = 2 \cdot cos^{-1}\left(1 - \frac{2h}{D}\right) = 2 \cdot cos^{-1}(1 - 2 \times 0{,}94) = 5{,}293317055 \text{ rad.}$$

Da eq. (6) tem-se:

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(5{,}293317055 - sen 5{,}293317055)^5}{5{,}293317055^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(5{,}293317055 + 0{,}835953682)^5}{28{,}01920544}\right]^{1/3}$$

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = [308{,}736666]^{1/3} = 6{,}75869326$$

b) Para *h/D* = 1, já calculado acima com as eqs. (4) e (6), tem-se:

$$\left[\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} = 6{,}28318531$$

6,28318531/6,75869326 = 0,9296

$\Rightarrow$ **Portanto, a vazão sob *h/D* = 1 é aproximadamente 0,93 vezes a vazão máxima.**

c.q.d.

LC - Vitória, ago/2019