

Equação de Manning aplicada ao escoamento em condutos circulares parcialmente cheios.

Eng° Luiz Camargo

De acordo com Akgiray, (2004), a equação de Manning tem sido a fórmula mais utilizada nos projetos de linhas esgoto devido à sua simplicidade e aos resultados satisfatórios que geralmente dá.

Segundo Zeghadnia et al, (2014), por longo tempo, a equação de Manning, vem sendo frequentemente considerada como o melhor modelo para calcular o escoamento em condutos com superfície livre.

Em unidades SI, a equação de Manning pode ser escrita da seguinte maneira

$$Q = \frac{A}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot I^{1/2} \quad (1)$$

Para o escoamento em condutos de seção circular, parcialmente cheios, em conformidade com a Fig. 1, tem-se:

$$A = \frac{D^2}{8} (\theta - \text{sen}\theta) \quad (2)$$

$$R_h = \frac{D}{4} \cdot \frac{(\theta - \text{sen}\theta)}{\theta} \quad (3)$$

$$\theta = 2 \cdot \cos^{-1} \left(1 - \frac{2h}{D} \right) \quad (4)$$

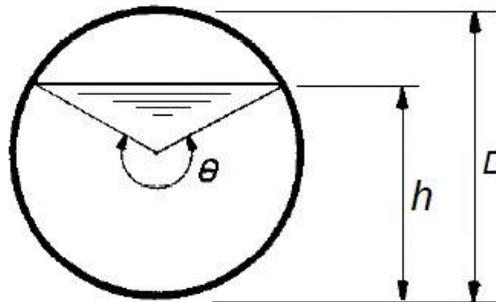


Fig. 1 – Seção circular parcialmente cheia.

onde:

A = área da seção transversal ocupada pelo fluxo hidráulico (m^2).

R_h = raio hidráulico (m) (definido como quociente entre área da seção do fluxo e o perímetro molhado).

n = coeficiente de rugosidade de Manning ($\text{s/m}^{1/3}$).

Q = vazão (m^3/s).

D = diâmetro do conduto (m).

I = declividade do conduto (m/m).

θ = ângulo central da superfície hidráulica (em radianos).

h/D = altura relativa da lâmina hidráulica (m/m)

Substituindo eqs. (2) e (3) em (1):

$$Q = \frac{D^2}{8n} (\theta - \text{sen}\theta) \cdot \left[\frac{D}{4} \cdot \frac{(\theta - \text{sen}\theta)}{\theta} \right]^{2/3} \cdot I^{1/2} \quad (5)$$

Da eq. (5) se deduz o que segue:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}} \right)^{1/3} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen}\theta)^5}{\theta^2} \right]^{1/3} \cdot I^{1/2} \quad (6)$$

$$I = (nQ)^2 \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}} \right)^{-2/3} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen}\theta)^5}{\theta^2} \right]^{-2/3} \quad (7)$$

$$D = 2^{13/8} \cdot \left(\frac{n \cdot Q}{I^{1/2}} \right)^{3/8} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen}\theta)^5}{\theta^2} \right]^{-1/8} \quad (8)$$

$$n = \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}} \right)^{1/3} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen}\theta)^5}{\theta^2} \right]^{1/3} \cdot I^{1/2} \quad (9)$$

Da equação da continuidade $Q = A \cdot V$ obtém-se V do quociente entre as eqs. (6) e (2):

$$V = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} \cdot \left(\frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta} \right)^{2/3} \cdot I^{1/2} \quad (10)$$

Dividindo a eq. (10) pela eq. (6):

$$V = \frac{8 \cdot Q}{D^2(\theta - \text{sen}\theta)} \quad (11)$$

Combinando as eqs. (10) e (11) tem-se ainda:

$$V = \left(\frac{I^{1/2}}{n} \right)^{3/4} \cdot \left(\frac{Q}{2} \right)^{1/4} \cdot \left(\frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta^2} \right)^{1/4} \quad (12)$$

E da eq. (4) tem-se:

$$h/D = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (13)$$

Determinação do ângulo θ :

As eqs. (6) a (13) dependem de θ . Quando h/D é conhecido determina-se θ com a eq. (4), caso contrário podem ocorrer os seguintes tipos de problemas, os quais, na determinação de θ , requerem o uso de **processo iterativo**:

- **Tipo I** - Conhecidos Q, D, I e n . Calcular $\theta, h/D$ e V . Da eq. (6), (7), (8) ou (9) tem-se:

$$(\theta - \operatorname{sen}\theta)^{5/3} \cdot \theta^{-2/3} - 2^{13/3} n Q D^{-8/3} I^{-1/2} = 0 \quad (14)$$

- **Tipo II** - Conhecidos Q, D, V e n . Calcular $\theta, h/D$ e I . Da eq. (11) tem-se:

$$\theta - \operatorname{sen}\theta - 8 Q V^{-1} D^{-2} = 0 \quad (15)$$

- **Tipo III** - Conhecidos V, D, I e n . Calcular $\theta, h/D$ e Q . Da eq. (10) tem-se:

$$(\theta - \operatorname{sen}\theta)^{2/3} \cdot \theta^{-2/3} - 4^{2/3} n V D^{-2/3} I^{-1/2} = 0 \quad (16)$$

- **Tipo IV** - Conhecidos Q, V, I e n . Calcular $\theta, h/D$ e D . Da eq. (12) tem-se:

$$(\theta - \operatorname{sen}\theta)^{1/4} \cdot \theta^{-1/2} - 2^{1/4} n^{3/4} V Q^{-1/4} I^{-3/8} = 0 \quad (17)$$

- A vazão máxima ocorre para $h/D = 0,94$ (não demonstrado aqui).

- A vazão sob $h/D = 1$ é 0,93 vezes a vazão máxima (não demonstrado aqui).

- A vazão para $h/D = 0,82$ é igual à vazão para $h/D = 1$ (não demonstrado aqui).

- Portanto no cálculo de θ as eqs. (14) a (17) podem resultar em duas soluções e, portanto, dois valores para h/D .

- Valores de θ que conduzem à solução única, limitam-se a $\theta < 4,53$ radianos, isto é, $h/D < 0,82$.

No caso de haver dois possíveis valores de θ , o valor da raiz encontrada pelo processo iterativo irá depender do valor inicial θ_0 , isto é, a priori não é possível prever se a raiz a ser encontrada será o maior ou o menor valor de θ .

Para evitar os processos iterativos e certificar-se de que o menor valor de h/D será encontrado, na hipótese de existirem duas possíveis soluções, Akgiray, (2010), recomenda as seguintes equações explícitas **aproximadas**:

- **Tipo I:**

$$\theta = 2 \times 6^{5/13} \cdot K^{3/13} \cdot \left[1 + 0,431 \cdot \operatorname{sen}^{-1}(2,98 \cdot K) \right] \quad (18)$$

onde:

$$K = \frac{Q \cdot n}{D^{8/3} \cdot I^{1/2}} \quad (18-a)$$

- **Tipo II:**

$$\theta = 2,51 \cdot Y^{-0,34} \cdot \left[\cos^{-1}(1 - 0,3183 \cdot Y) \right]^{1,33} \quad (19)$$

onde:

$$Y = \frac{8 \cdot Q}{V \cdot D^2} \quad (19-a)$$

- **Tipo III:**

$$\theta = 24^{1/2} \cdot W^{3/4} \cdot \left\{ 1 + 0,255 \cdot \left[\operatorname{sen}^{-1}(2,21 \cdot W) \right]^{2,1} \right\} \quad (20)$$

onde:

$$W = \frac{V \cdot n}{D^{2/3} \cdot I^{1/2}} \quad (20-a)$$

- Tipo IV:

$$\theta = 12 \cdot Z^3 \cdot \left\{ 1 + 0,0765 \cdot \left[\text{sen}^{-1}(1,84527 \cdot Z) \right]^{4,72} \right\} \quad (21)$$

onde:

$$Z = \frac{V^{4/3} \cdot n}{Q^{1/3} \cdot I^{1/2}} \quad (21-a)$$

Valores usuais do Coeficiente n de Manning (SI):

- Tubos cerâmicos, tubos de concreto: 0,013
- Tubos concreto liso, tubos de ferro fundido: 0,012
- Tubos de fibrocimento: 0,011
- Tubos de PVC: 0,010

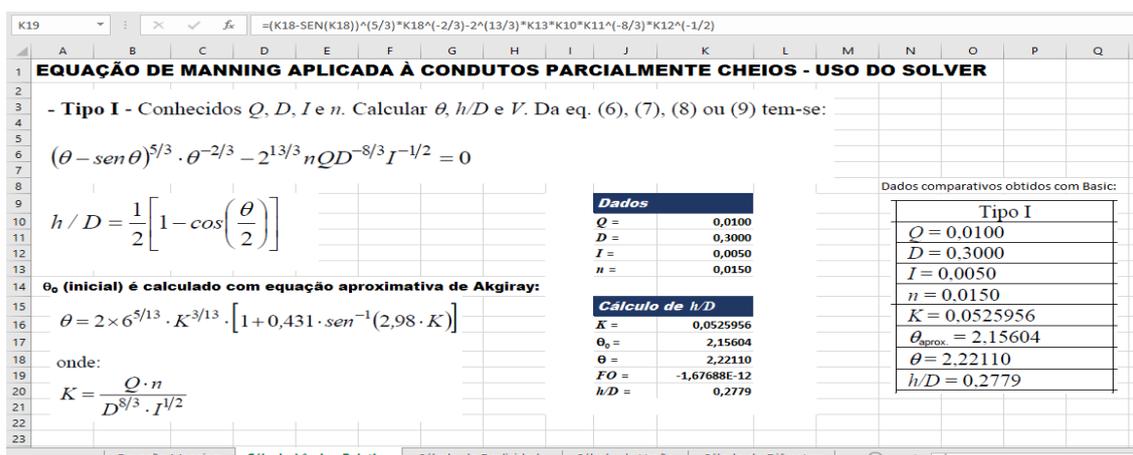
Exemplos (com θ em radianos e demais variáveis com unidades SI):

	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
Dados:	$Q = 0,0100$	$Q = 0,0100$	$V = 0,6096$	$Q = 0,0200$
	$D = 0,3000$	$D = 0,4500$	$D = 0,4570$	$V = 0,6000$
	$I = 0,0050$	$V = 0,5000$	$I = 0,0025$	$I = 0,0040$
	$n = 0,0150$	$n = 0,0130$	$n = 0,0130$	$n = 0,0150$
Calculo (*):	$K = 0,0525956$	$Y = 0,790123$	$W = 0,267141$	$Z = 0,442167$
	$\theta_{\text{aprox.}} = 2,15604$	$\theta_{\text{aprox.}} = 1,77297$	$\theta_{\text{aprox.}} = 1,99720$	$\theta_{\text{aprox.}} = 1,10103$
	$\theta = 2,22110$	$\theta = 1,77029$	$\theta = 2,01594$	$\theta = 1,10248$
	$h/D = 0,2779$	$h/D = 0,1834$	$h/D = 0,2332$	$h/D = 0,0741$
	$V = 0,6237$	$I = 0,00228$	$Q = 0,0177$	$D = 1,1265$

(* Os valores aproximados do ângulo, $\theta_{\text{aprox.}}$, foram calculados com as equações de Akgiray, 2010, (eqs. 18 a 21), enquanto que os valores de θ , exatos até a 6ª casa decimal, foram calculados com o método iterativo de Newton (eqs. 14 a 17), utilizando os valores de Akgiray como valor inicial no processo iterativo.

Cabe ressaltar que derivando-se a eq. (6) em relação a θ e igualando a zero mostra-se facilmente que a vazão é máxima quando $\theta = 302,5^\circ$, equivalente a uma lâmina líquida relativa de $h/D = 0,94$. Portanto, em condutos de seção circular com escoamento livre próximos deste valor poderá haver ambiguidades de valores da lâmina líquida para uma mesma vazão. Nessas circunstâncias, como a altura da lâmina fica muito próxima do diâmetro, caso haja instabilidade no escoamento, o conduto livre passa a funcionar a seção plena como conduto forçado, condição essa para a qual poderá não ter sido constituído o conduto, o que poderia causar sua ruptura com danos. Além disso, nas circunstâncias referidas, instabilidades que provoquem elevação da lâmina líquida podem causar redução da vazão. Por isso, corriqueiramente se adota como limite h/D entre 0,75 e 0,80.

A seguir planilhas para resolução dos 4 tipos de problemas acima, pela ferramenta SOLVER do Excel:



EQUAÇÃO DE MANNING APLICADA À CONDUTOS PARCIALMENTE CHEIOS - USO DO SOLVER

- Tipo II - Conhecidos Q, D, V e n . Calcular $\theta, h/D$ e I . Da eq. (11) tem-se:

$$\theta - \text{sen} \theta - 8QV^{-1}D^{-2} = 0$$

$$I = (nQ)^2 \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}}\right)^{-2/3} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen} \theta)^5}{\theta^2}\right]^{-2/3}$$

θ_0 (inicial) é calculado com equação aproximativa de Akgiray:

$$\theta = 2,51 \cdot Y^{-0,34} \cdot \left[\cos^{-1}(1 - 0,3183 \cdot Y)\right]^{1,33}$$

onde:

$$Y = \frac{8 \cdot Q}{V \cdot D^2}$$

Dados	
$Q =$	0,0100
$D =$	0,4500
$V =$	0,5000
$n =$	0,0130

Dados comparativos obtidos com Basic:	
Tipo II	
$Q =$	0,0100
$D =$	0,4500
$V =$	0,5000
$n =$	0,0130
$Y =$	0,790123
$\theta_{\text{aprox.}} =$	1,77297
$\theta =$	1,77029
$FO =$	-2,64305E-07
$h/D =$	0,1834
$I =$	0,00228

Equação Manning | Cálculo Lâmina Relativa | **Cálculo da Declividade** | Cálculo da Vazão | Cálculo do Diâmetro

EQUAÇÃO DE MANNING APLICADA À CONDUTOS PARCIALMENTE CHEIOS - USO DO SOLVER

- Tipo III - Conhecidos V, D, I e n . Calcular $\theta, h/D$ e Q . Da eq. (10) tem-se:

$$(\theta - \text{sen} \theta)^{2/3} \cdot \theta^{-2/3} - 4^{2/3} n V D^{-2/3} I^{-1/2} = 0$$

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{D^8}{2^{13}}\right)^{1/3} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen} \theta)^5}{\theta^2}\right]^{1/3} \cdot I^{1/2}$$

θ_0 (inicial) é calculado com equação aproximativa de Akgiray:

$$\theta = 24^{1/2} \cdot W^{3/4} \cdot \left\{1 + 0,255 \cdot \left[\text{sen}^{-1}(2,21 \cdot W)\right]^{2,1}\right\}$$

onde:

$$W = \frac{V \cdot n}{D^{2/3} \cdot I^{1/2}}$$

Dados	
$V =$	0,6096
$D =$	0,4570
$I =$	0,0025
$n =$	0,0130

Dados comparativos obtidos com Basic:	
Tipo III	
$V =$	0,6096
$D =$	0,4570
$I =$	0,0025
$n =$	0,0130
$W =$	0,267141
$\theta_{\text{aprox.}} =$	1,99720
$\theta =$	2,01594
$FO =$	2,71037E-07
$h/D =$	0,2332
$Q =$	0,0166

Equação Manning | Cálculo Lâmina Relativa | Cálculo da Declividade | **Cálculo da Vazão** | Cálculo do Diâmetro

EQUAÇÃO DE MANNING APLICADA À CONDUTOS PARCIALMENTE CHEIOS - USO DO SOLVER

- Tipo IV - Conhecidos Q, V, I e n . Calcular $\theta, h/D$ e D . Da eq. (12) tem-se:

$$(\theta - \text{sen} \theta)^{1/4} \cdot \theta^{-1/2} - 2^{1/4} n^{3/4} V Q^{-1/4} I^{-3/8} = 0$$

$$D = 2^{13/8} \cdot \left(\frac{n \cdot Q}{I^{1/2}}\right)^{3/8} \cdot \left[\frac{(\theta - \text{sen} \theta)^5}{\theta^2}\right]^{-1/8}$$

θ_0 (inicial) é calculado com equação aproximativa de Akgiray:

$$\theta = 12 \cdot Z^3 \cdot \left\{1 + 0,0765 \cdot \left[\text{sen}^{-1}(1,84527 \cdot Z)\right]^{4,72}\right\}$$

onde:

$$Z = \frac{V^{4/3} \cdot n}{Q^{1/3} \cdot I^{1/2}}$$

Dados	
$Q =$	0,0200
$V =$	0,6000
$I =$	0,0040
$n =$	0,0150

Dados comparativos obtidos com Basic:	
Tipo IV	
$Q =$	0,0200
$V =$	0,6000
$I =$	0,0040
$n =$	0,0150
$Z =$	0,442167
$\theta_{\text{aprox.}} =$	1,10103
$\theta =$	1,10248
$FO =$	9,46621E-12
$h/D =$	0,0741
$D =$	1,1265

Equação Manning | Cálculo Lâmina Relativa | Cálculo da Declividade | Cálculo da Vazão | **Cálculo do Diâmetro**

Nota:

Se $h/D = 1$, isto é, se o escoamento no conduto é à plena seção (conduto forçado), então $\theta = 2\pi$. Daí, da eq. (6), para tubos pressurizados, tem-se a seguinte equação, com I representando a perda de carga unitária (m/m):

$$Q = \frac{\pi}{n} \left(\frac{D^8}{2^{10}}\right)^{1/3} I^{1/2} = \frac{0,31168 \cdot D^{8/3} \cdot I^{1/2}}{n} \tag{22}$$

Bibliografia:

1 - Akgiray, Ö., (2004). "Simple formula for velocity, depth of flow and slope calculations in partially filled circular pipes". Environmental Engineering Science, 21(3),371-385.

2 - Akgiray, Ö., (2005). "Explicit solutions of the Manning equation for partially filled circular pipes". Canadian Journal of Civil Engineering, 32: 490–499.

3 - Akgiray, Ö., (2010). "Manning equation applied to partially filled circular pipes". ME 262 Basic Fluid Mechanics 2010.

4 - Porto, R.M.; "Hidráulica Básica", 4ª edição, EESC-USP, São Carlos, 2006.

5 - Quintela, A.C.; "Hidráulica", Fund. Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2011.

6 - Zeghadnia, L., Djemili, L., and Houichi, L., (2014). "New equation for the computation of flow velocity in partially filled pipes arranged in parallel". Water Science & Technology, 70: 160-166.

LC, Vitória/ES, dez/2021.