Associação de tubos em série e em paralelo.

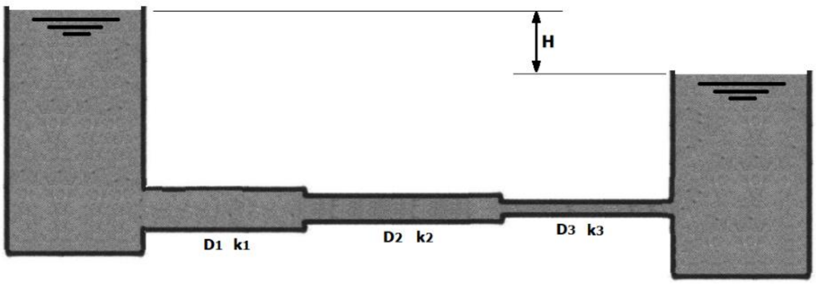
Engº Luiz Camargo

O presente texto tem por objetivo a análise de alguns aspectos da associação de condutos em série e em paralelo a serem considerados no dimensionamento de tubulações que envolvam tais associações, que aqui serão examinados com a utilização das equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White, onde são previamente conhecidos o comprimento, diâmetro e rugosidade dos tubos, a viscosidade cinemática do líquido em escoamento e o desnível geométrico entre os reservatórios. O Apêndice apresenta códigos em linguagem Basic para o cálculo automatizado.

1 - Condutos em Série

Diz-se que dois ou mais condutos de comprimentos, diâmetros e rugosidades distintas estão em série quando os mesmos estão interligados por suas extremidades e permitem o escoamento contínuo do fluido através de cada um deles, um após o outro.

A característica importante de um sistema de condutos em série é que a vazão é a mesma nos tubos, enquanto que as perdas de carga são somadas.



Tipicamente a análise hidráulica de tubos em série se depara com dois tipos de problema: determinar a altura H para uma vazão Q dada, e encontrar a vazão para uma altura conhecida.

1.1 - Determinação da altura quando conhecida a vazão.

As perdas de carga são calculadas pela equação de Darcy-Weisbach:

$$h_f = \frac{8 f L Q^2}{g \pi^2 D^5} \tag{1}$$

Considerando as perdas de carga singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos comprimentos dos condutos e aplicando a Eq. (1) a cada um dos trechos, H é calculado com:

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2}\left(\frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \cdots + \frac{f_n L_n}{D_n^5} \right) \tag{2}$$

com f_1, f_2, ... f_n obtidos iterativamente com a equação de Colebrook-White:

$$f = 1,235\left[-\ln\left(0,27\frac{k}{D} + \frac{1,971 D\nu}{Q\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \tag{3}$$

onde,

H = desnível ou altura entre os reservatórios (m)
Q = vazão (m^3/s)
L = comprimento de cada trecho (m)
D = diâmetro de cada conduto (m)
f = fator de atrito de Darcy-Weisbach em cada tubo (adimensional)
ν = viscosidade cinemática do líquido em escoamento (m^2/s)
k = rugosidade de cada conduto (m)
g = aceleração da gravidade local (m/s^2)
n = número de condutos.

Note-se que a Eq. (3) é implícita em f e, portanto, não possui solução direta. A solução, portanto, haverá de vir de algum método iterativo de aproximações sucessivas. Um procedimento elementar e viável na solução dessa equação é o Método da Iteração Linear (MIL) a ser empregado doravante no presente texto sempre que a Eq. (3) for utilizada, que é um processo cujos passos, num roteiro básico, são:

1 - Estimar um valor inicial para f no segundo membro, digamos 0,01.
2 - Calcula-se novo valor para f que está no primeiro membro.
3 - Compara-se a diferença entre os valores calculado e inicial com a tolerância estabelecida.
4 - Se maior que a tolerância, o novo valor passa a ser o valor inicial, e volta-se para o passo 2,
5 - Se igual ou menor, o atual valor de f é o valor procurado.

Procedimentos repetitivos assim, quando realizados manualmente são tediosos e cansativos pois os passos acima são aplicados a cada um dos $\boldsymbol{n}$ trechos. O mais apropriado é utilizar algum meio de cálculo automatizado, por processo informatizado.

Em termos de cálculo automático, o critério aqui apresentado é mostrado no Apêndice, no código fonte para um programa computacional denominado SERIE-H+.BAS, bem compacto, porém plenamente funcional, escrito em linguagem Turbo-Basic, mas que pode facilmente ser adaptado para outras versões Basic ou para outras linguagens computacionais, ou ainda para Excel, MatLab, Mathematica, etc.

1.2 - Determinação da vazão quando conhecida a altura.

A vazão é calculada explicitando Q na Eq. (2):

$$Q = \sqrt{\frac{g\pi^2 H / 8}{\frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \cdots + \frac{f_n L_n}{D_n^5}}} \qquad (4)$$

com f_1, f_2, ... f_n obtidos iterativamente com a Eq. (3) como mostrado anteriormente. Mas note-se que aqui há uma dificuldade adicional para o cálculo de f_1, f_2, ... f_n, pois Q não é conhecido. Portanto há que se buscar outros recursos. Um procedimento viável na solução desse tipo de problema seria a resolução simultânea das Eqs. (3) e (4) num processo iterativo. Um roteiro básico de cálculo consiste de:

1 - Estimar um valor inicial para a vazão Q.
2 - Com Q estimado e a Eq. (3) encontra-se f_1, f_2, ... f_n.
3 - Encontrados f_1, f_2, ... f_n utiliza-se a Eq. (4) para calcular novo valor de Q.
4 - Se o novo valor de Q for igual ao valor estimado, o problema está resolvido. Caso contrário estimar para vazão um valor mais adequado e repetir o procedimento até que Q calculado seja igual à Q estimado.

Então a solução desse tipo de problema deverá envolver dois processos de aproximações sucessivas: um para a determinação de f e outro para cálculo de Q. Um dentro do outro. Tarefa esta que se realizada manualmente torna-se demorada, tediosa, cansativa, confusa e susceptível a erros. Como já dito, o mais apropriado é automatizar o cálculo, por processo computacional. Assim, além do MIL, já descrito antes na parte 1.1 para o cálculo de f, aqui será utilizado também o Método Iterativo da Bisseção, que é uma maneira prática de obter uma solução para Q quando se sabe que ela se encontra entre os limites de uma faixa de valores. Esse método tem a vantagem da simplicidade operacional e convergência garantida. Para encontrar Q exige dois valores iniciais limites, $Q_{\min}$ e $Q_{\max}$, cuja solução (raiz) esteja na faixa entre os dois, que podem ser, digamos, 0 e 50 m^3/s, visto que dificilmente a vazão em tubulações estará fora desses limites.

A solução, então, é obtida atribuindo-se sucessivos valores iniciais estimados para a vazão, conforme roteiro indicado, que gerarão os subsequentes e sucessivos valores calculados da vazão, até que o valor calculado seja suficientemente próximo do valor estimado, dentro de uma tolerância arbitrada.

O método da bisseção consiste em, primeiro, dividir ao meio o intervalo entre os valores iniciais, encontrando:

$$Q_{est} = \frac{Q_{\max} + Q_{\min}}{2} \qquad (5)$$

Este é o valor inicial estimado. Ao final do roteiro mencionado neste tópico, se a vazão calculada for maior que a vazão estimada, atribui-se o valor calculado a $Q_{\max}$, caso contrário atribui-se o valor calculado a $Q_{\min}$. Com a Eq. (5) encontra-se novo Q_{est} e o procedimento repete-se.

A cada repetição o novo intervalo é reduzido à metade do anterior, o que faz com que Q vá se situando entre limites cada vez mais próximos, até que se atinja a precisão desejada, tal que abs($Q_{\max}$-$Q_{\min}$) $\leq tol$.

Como o intervalo é sempre dividido ao meio, é até possível estabelecer o número mínimo de iterações a serem realizadas, para um determinado intervalo [$Q_{\min}$, $Q_{\max}$] e tolerância de erro tol, para que se atinja o resultado desejado.

Seja k o número de iterações. Na iteração de ordem k, o intervalo [Q_{mink}, Q_{maxk}] terá um valor igual a

$$\frac{Q_{max} - Q_{\min}}{2^k}$$

Para que k seja a última iteração, é necessário que este intervalo seja menor ou igual à tolerância estabelecida. Portanto o processo iterativo pode então ser interrompido pelo número de iterações:

$$\frac{Q_{max} - Q_{\min}}{2^k} \leq tol$$

$$k > \frac{\log\left(Q_{\max} - Q_{\min}\right) - \log\left(tol\right)}{\log\left(2\right)} \qquad (6)$$

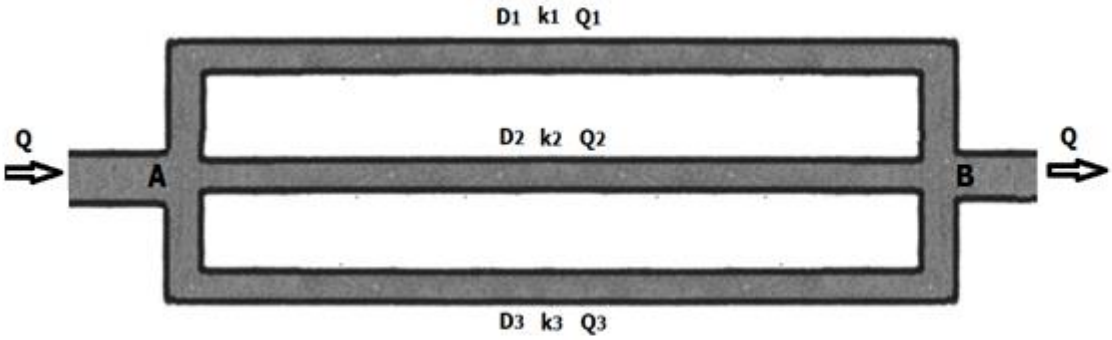
Em suma, este tópico envolve dois processos iterativos: um para o cálculo da vazão, e outro, dentro do primeiro, para cálculo do fator de atrito.

Em termos de cálculo automático, o critério aqui apresentado é mostrado no Apêndice, no código fonte para um programa computacional denominado SERIE-Q+.BAS, bem compacto, porém plenamente funcional, escrito em linguagem Turbo-Basic, mas que pode facilmente ser adaptado para outras versões Basic ou para outras linguagens computacionais, ou ainda para Excel, MatLab, Mathematica, etc.

Obs: para o caso particular de somente dois condutos em série, opcionalmente pode ser usado o programa AQUATUBO.BAS (não apresentado aqui) onde são examinadas diversas outras situações, como determinação dos comprimentos, dos diâmetros, das perdas, etc.

2 - Condutos em Paralelo

Diz-se que dois ou mais condutos estão em paralelo quando suas extremidades a montante estão reunidas num mesmo ponto e as extremidades a jusante reunidas em outro ponto, de modo a permitir que a vazão se divida entre os tubos e posteriormente torne a se reunificar.



A característica importante de um sistema de condutos em paralelo é que as perdas de carga em cada um deles é a mesma, enquanto que as vazões são somadas.

Na associação de tubos em paralelo, dois tipos de problema serão analisados: a determinação da vazão Q para uma altura H dada, e o cálculo da distribuição das vazões e da perda de carga para uma vazão conhecida. Considera-se H a diferença entre as cotas piezométricas entre os pontos A e B da figura acima.

2.1 - Determinação da vazão quando conhecida a altura.

Este caso equivale, na realidade, à simples determinação da vazão em tubos individuais, pois a perda de carga conhecida possibilita a determinação imediata das vazões em cada um dos tubos, cuja soma resulta na vazão total.

Considerando as perdas de carga singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos comprimentos dos condutos e eliminando f pela combinação das Eqs. (1) e (3), a vazão em cada trecho é dada por:

$$Q_i = -0,9647\sqrt{HgD_i^5 / L_i} \cdot \ln\left(0,27\frac{k_i}{D_i} + \frac{1,7748\nu}{\sqrt{HgD_i^3 / L_i}}\right) \qquad (7)$$

onde:

i = 1, 2, 3, ... n.
n = número de condutos em paralelo.

E a vazão total é dada por:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad (8)$$

Em termos de cálculo automático, o critério aqui apresentado é mostrado no Apêndice, no código fonte para um programa computacional denominado PARA-Q+.BAS, bem compacto, porém plenamente funcional, escrito em linguagem Turbo-Basic, mas que pode facilmente ser adaptado para outras versões Basic ou para outras linguagens computacionais, ou ainda para Excel, MatLab, Mathematica, etc.

2.2 - Determinação da altura quando conhecida a vazão.

Este caso é mais abrangente que o anterior pois requer cálculo por aproximações sucessivas. Para a resolução deste tipo de problema, Lencastre (1983) e Streeter & Wylie (1985), recomendam o seguinte procedimento:

1 - Admitir uma vazão Q'_1 no conduto n° 1.
2 - Com essa vazão Q'_1 calcular H'_1.
3 - Com H'_1, que é comum a todos os trechos, calcular Q'_2, Q'_3, ... Q'_n.
4 - Com as ***n*** vazões para uma perda de carga comum, admitir que a vazão dada Q se distribua nos condutos na mesma proporção que Q'_1, Q'_2, ... Q'_n. Dessa forma tem-se:

$$Q_1 = \frac{Q'_1}{\sum Q'} Q \qquad Q_2 = \frac{Q'_2}{\sum Q'} Q \quad ... \quad Q_n = \frac{Q'_n}{\sum Q'} Q \qquad (9)$$

5 - Verificar a precisão dessas vazões calculando H_1, H_2, ... H_n para as vazões Q_1, Q_2, ... Q_n.

Segundo Streeter & Wylie (1985), pela escolha criteriosa de Q'_1 (item 1 do procedimento acima) estimada como uma porcentagem da vazão total do sistema que deve passar pelo tubo 1 (com base no diâmetro, comprimento e rugosidade), a Eq. (9) fornece valores corretos, com pequena variação percentual, a qual está dentro da faixa de precisão dos fatores de atrito. Já Lencastre (1983), ressalta que se os resultados não forem suficientemente aproximados, deve-se repetir o procedimento partindo do valor Q_1 calculado com a Eq. (9). Qual seja, o grau de precisão do procedimento recomendado irá depender da boa escolha de Q'_1. Na falta de um critério melhor para essa escolha, entende-se que a fórmula de Bresse ($D=K\sqrt{Q}$) pode vir a ser uma alternativa para estimar Q'_1. Com K=0,94 resultou que $Q'_1=(D_1/0{,}94)^2$ em diversas simulações apresentou resultados de elevada precisão com uma só rodada de cálculos sem precisar repetir o procedimento.

Quanto ao item 2 do procedimento, o valor de H'_1 é calculado com a Eq. (1) onde, porém, f não é conhecido e sua determinação com a Eq. (3) requer o processo iterativo MIL já mostrado anteriormente. No item 3, Q'_2, Q'_3, ... Q'_n são obtidos com a Eq. (7), obviamente para i = 2, 3, ... n. No item 4 a vazão total é obtida com a Eq. (8) utilizando Q_1, Q_2, ... Q_n calculados com a Eq. (9). Por fim, no item 5, a verificação da conformidade das vazões Q_1, Q_2, ... Q_n fornecidas pela Eq. (9) é feita com as Eqs. (1) e (3) calculando-se H_1, H_2, ... H_n. Estando os valores das vazões suficientemente corretos então os valores de H_1, H_2, ... H_n deverão ser os mesmos (iguais), qual seja, o valor procurado.

Em termos de cálculo automático, o critério aqui apresentado é mostrado no Apêndice, no código fonte de um programa computacional denominado PARA-H+.BAS, bem compacto, porém plenamente funcional, escrito em linguagem Turbo-Basic, mas que pode facilmente ser adaptado para outras versões Basic ou para outras linguagens computacionais, ou ainda para Excel, MatLab, Mathematica, etc.

Referências bibliográficas:

1 - Dieguez, J.P.P. "Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia", Interciência, Rio, 1992.
2 - Lencastre, A. "Hidráulica Geral", Hidroprojecto, Lisboa, 1983.
3 - Streeter, V.L. & Wylie, E.B. "Fluid Mechanics", McGraw-Hill, 8th Edition, New York, 1985.

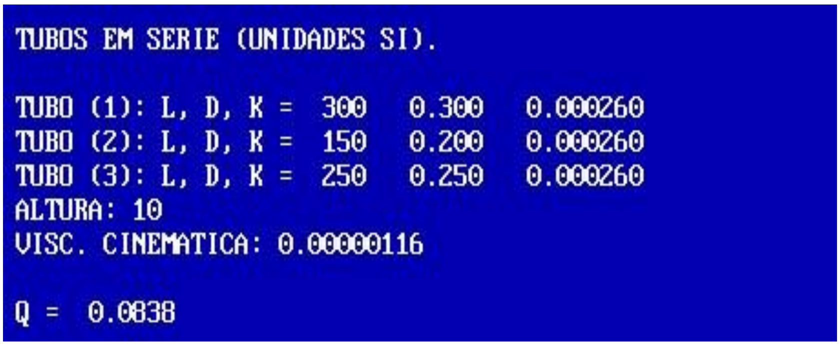
LC, Vitória, 09/10/2020.

Apêndice.

Nota: a numeração de linhas nos códigos a seguir é meramente orientativa e, querendo, pode ser removida. Contudo, algumas versões Basic, como GW-Basic, exigem a numeração. Os dados são introduzidos através dos comandos *READ* e *DATA*.

```
010 'SERIE-H+.BAS - N TUBOS EM SERIE - EQ. DARCY-WEISBACH E COLEBROOK-WHITE
020 'DADOS L, D, k, Q e VISC, CALCULAR H - DADOS INTRODUZIDOS COM COMANDOS READ e DATA
030 CLEAR:DEFINT I,N:G=9.806: N=3
040 DIM L(N),D(N),k(N)
050 FOR I=1 TO N
060 READ L(I),D(I),k(I):DATA 300,0.3,0.00026, 150,0.2,0.00026, 250,0.25,0.00026
070 NEXT I
080 READ Q,VISC:DATA 0.0760,0.00000116
090 SOMA=0
100 FOR I=1 TO N
110 f=0.01:DO:f0=f:f=1.325*(-LOG(0.27*k(I)/D(I)+1.971*D(I)*VISC/Q/SQR(f0)))^(-2):LOOP WHILE ABS(f-f0)/f>0.00001
120 SOMA=SOMA+f*L(I)/D(I)^5
130 NEXT I
140 H=0.81057*Q^2*SOMA/G
150 COLOR 15,1,1:CLS:PRINT:PRINT:PRINT" TUBOS EM SERIE (UNIDADES SI).":PRINT
160 FOR I=1 TO N
170 PRINT" TUBO";MID$(STR$(I),2);": L, D, k = ";L(I);" ";:PRINT USING"##.###";D(I);:PRINT"   ";:PRINT USING"#.######";k(I):NEXT I
180 PRINT" VAZAO:";:PRINT USING"###.####";Q:PRINT" VISC. CINEMATICA: ";:PRINT USING"#.########";VISC
190 PRINT:PRINT" ALTURA =";INT(100*H)/100:END
```


```
010 'SERIE-Q+.BAS - N TUBOS EM SERIE - EQ. DARCY-WEISBACH E COLEBROOK-WHITE - METODO DA BISSECAO
020 'DADOS L, D, k, H e VISC, CALCULAR Q - DADOS INTRODUZIDOS COM COMANDOS READ e DATA
030 CLEAR:DEFINT I,N:G=9.806: N=3
040 DIM L(N),D(N),k(N)
050 FOR I=1 TO N
060 READ L(I),D(I),k(I):DATA 300,0.3,0.00026, 150,0.2,0.00026, 250,0.25,0.00026
070 NEXT I
080 READ H,VISC:DATA 10,0.00000116
090 QMIN=0:QMAX=50:TOL=0.00001:ITER=(LOG(QMAX-QMIN)-LOG(TOL))/LOG(2)
100 FOR I1=1 TO ITER
110 QEST=(QMAX+QMIN)/2:SOMA=0
120 FOR I=1 TO N
130 f=0.01:DO:f0=f:f=1.325*(-LOG(0.27*k(I)/D(I)+1.971*D(I)*VISC/QEST/SQR(f0)))^(-2):LOOP WHILE ABS(f-f0)/f>TOL
140 SOMA=SOMA+f*L(I)/D(I)^5
150 NEXT I
160 Q=SQR(1.2337*G*H/SOMA):IF Q>QEST THEN QMAX=Q ELSE QMIN=Q
170 NEXT I1
180 COLOR 15,1,1:CLS:PRINT:PRINT:PRINT" TUBOS EM SERIE (UNIDADES SI).":PRINT
190 FOR I=1 TO N
200 PRINT" TUBO (";MID$(STR$(I),2);"): L, D, k = ";L(I);" ";:PRINT USING"##.###";D(I);:PRINT"   ";:PRINT USING"#.######";k(I):NEXT I
210 PRINT" ALTURA:";INT(10*H)/10:PRINT" VISC. CINEMATICA: ";:PRINT USING"#.########";VISC
220 PRINT:PRINT" Q =";:PRINT USING"###.####";Q:END
```



```
010 'PARA-Q+.BAS - N TUBOS EM PARALELO - EQ. DARCY-WEISBACH E COLEBROOK-WHITE
020 'DADOS L, D, k, H e VISC, CALCULAR Q - DADOS INTRODUZIDOS COM COMANDOS READ e DATA
030 CLEAR:DEFINT I,N:G=9.806: N=3
040 DIM L(N),D(N),k(N),Q(N)
050 FOR I=1 TO N
060 READ L(I),D(I),k(I)
070 DATA 914,0.3,0.0003,610,0.2,0.00003,1220,0.4,0.0002
080 NEXT I
090 READ H,VISC:DATA 8.67, 0.0000046
100 SOMAQ=0
110 FOR I=1 TO N
120 Q(I)=-0.9647*SQR(H*G*D(I)^5/L(I))*LOG(0.27*k(I)/D(I)+1.7748*VISC/SQR(H*G*D(I)^3/L(I)))
130 SOMAQ=SOMAQ+Q(I)
140 NEXT I
150 COLOR 15,1,1:CLS:PRINT:PRINT:PRINT" TUBOS EM PARALELO (UNIDADES SI).":PRINT
160 FOR I=1 TO N
170 PRINT" TUBO";MID$(STR$(I),2);": L, D, k = ";L(I);" ";:PRINT USING"##.###";D(I);:PRINT"   ";:PRINT USING"#.######";k(I)
180 NEXT I
190 PRINT" ALTURA:";:PRINT USING"###.##";H:PRINT" VISC. CINEMATICA: ";:PRINT USING"#.########";VISC
200 PRINT:FOR I=1 TO N:PRINT" Q";MID$(STR$(I),2);" = ";:PRINT USING"###.####";Q(I):NEXT I
210 PRINT:PRINT" VAZAO TOTAL =";:PRINT USING"###.####";SOMAQ: END
```

```
TUBOS EM PARALELO (UNIDADES SI).

TUBO1: L, D, K =  914   0.300   0.000300
TUBO2: L, D, K =  610   0.200   0.000030
TUBO3: L, D, K =  1220   0.400   0.000200
ALTURA:  8.67
VISC. CINEMATICA: 0.00000460

Q1 =    0.1123
Q2 =    0.0526
Q3 =    0.2130

VAZAO TOTAL =   0.3779
```

```
010 'PARA-H+.BAS - N TUBOS EM PARALELO - EQ. DARCY-WEISBACH E COLEBROOK-WHITE
020 'DADOS L, D, k, Q e VISC, CALCULAR H - DADOS INTRODUZIDOS COM COMANDOS READ e DATA
030 CLEAR:DEFINT I,N:G=9.806 : N=3
040 DIM L(N),D(N),k(N),Q(N),QQ(N),H(N)
050 FOR I=1 TO N
060 READ L(I),D(I),k(I)
070 DATA 914,0.3,0.0003,610,0.2,0.00003,1220,0.4,0.0002
080 NEXT I
090 READ QT,VISC:DATA 0.340, 0.0000046
100 QQ(1)=(D(1)/0.94)^2 'valor inicial de Q com formula de Bresse
110 f=0.01:DO:f0=f:f=1.325*(-LOG(0.27*k(1)/D(1)+1.971*D(1)*VISC/QQ(1)/SQR(f0)))^(-2):LOOP WHILE ABS(f-f0)/f>0.00001
120 HH=0.81057*f*L(1)*QQ(1)^2/(G*D(1)^5):SOMAQQ=QQ(1)
130 FOR I=2 TO N
140 QQ(I)=-0.9647*SQR(HH*G*D(I)^5/L(I))*LOG(0.27*k(I)/D(I)+1.7748*VISC/SQR(HH*G*D(I)^3/L(I)))
150 SOMAQQ=SOMAQQ+QQ(I)
160 NEXT I
170 FOR I=1 TO N
180 Q(I)=QQ(I)*QT/SOMAQQ
190 f=0.01:DO:f0=f:f=1.325*(-LOG(0.27*k(I)/D(I)+1.971*D(I)*VISC/Q(I)/SQR(f0)))^(-2):LOOP WHILE ABS(f-f0)/f>0.00001
200 H(I)=0.81057*f*L(I)*Q(I)^2/(G*D(I)^5)
210 NEXT I
220 COLOR 15,1,1:CLS:PRINT:PRINT:PRINT" TUBOS EM PARALELO (UNIDADES SI).":PRINT
230 FOR I=1 TO N
240 PRINT" TUBO";MID$(STR$(I),2);": L, D, k = ";L(I);" ";:PRINT USING"##.###";D(I);:PRINT"   ";:PRINT USING"#.######";k(I)
250 NEXT I
260 PRINT" VAZAO:";:PRINT USING"###.####";QT:PRINT" VISC. CINEMATICA: ";:PRINT USING"#.########";VISC
270 PRINT:FOR I=1 TO N:PRINT" Q";MID$(STR$(I),2);" = ";:PRINT USING"###.####";Q(I):NEXT I
280 PRINT:FOR I=1 TO N:PRINT" H";MID$(STR$(I),2);" = ";:PRINT USING"###.##";H(I):NEXT I: END
```

```
TUBOS EM PARALELO (UNIDADES SI).

TUBO1: L, D, K =  914   0.300   0.000300
TUBO2: L, D, K =  610   0.200   0.000030
TUBO3: L, D, K =  1220   0.400   0.000200
VAZAO:  0.3400
VISC. CINEMATICA: 0.00000460

Q1 =    0.1012
Q2 =    0.0471
Q3 =    0.1917

H1 =    7.10
H2 =    7.10
H3 =    7.10
```