

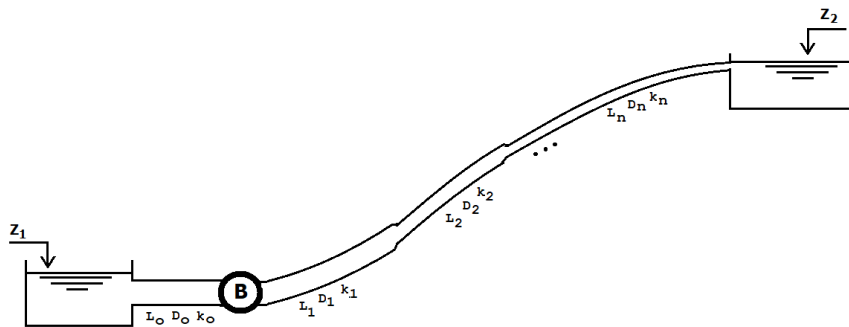
# Associação de N condutos em série com bombeamento. Uso do Excel.

Engº Luiz Camargo

O presente texto tem por objetivo a análise de alguns aspectos da associação de N condutos de recalque em série, com grupo motobomba na extremidade à montante, a serem considerados no dimensionamento de tubulações que envolvam tal associação, que aqui serão examinados com a utilização das equações de Darcy-Weisbach e Swamee-Jain, fazendo uso da ferramenta "Atingir Meta" do Excel, onde sempre são previamente conhecidos o comprimento, diâmetro e rugosidade de cada um dos tubos, e a viscosidade cinemática do líquido em escoamento. Então, são três as situações na análise aqui proposta, envolvendo a determinação: a) da vazão; b) do desnível topográfico entre os reservatórios e c) da potência do grupo motobomba. Na determinação de qualquer uma dessas três variáveis as duas demais deverão ser conhecidas. Esta análise se aplica a condutos de seção circular, de qualquer natureza, diâmetro e extensão, e a qualquer líquido incompressível escoando em regime permanente. Problemas típicos são apresentados.

## 1 - Condutos de recalque em série.

Diz-se que dois ou mais condutos de comprimentos, diâmetros e rugosidades distintas estão em série quando os mesmos estão interligados por suas extremidades e permitem o escoamento contínuo do fluido através de cada um deles, um após o outro. A situação a ser aqui analisada fica caracterizada quando este conjunto de condutos contém à montante um grupo motobomba alimentado por um reservatório de nível constante, e à jusante um reservatório de descarga também de nível constante, conforme figura a seguir.



A característica importante de um sistema de condutos em série, aqui utilizada, é que a vazão é a mesma em todos os trechos, enquanto que as perdas de carga são somadas. Inclui-se os efeitos do atrito na sucção.

## 2 - Determinação da vazão quando conhecidos a potência e o desnível entre os reservatórios.

A perda de carga em cada um dos trechos de toda a tubulação é dada pela equação de Darcy-Weisbach:

$$h_f = \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \quad (1)$$

Considerando as perdas singulares como comprimentos equivalentes já adicionados aos respectivos comprimentos, aplicando a Eq. (1) a cada um dos trechos da tubulação e efetuando a soma, a perda de carga total será:

$$H_f = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left( \frac{f_0 L_0}{D_0^5} + \frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \frac{f_3 L_3}{D_3^5} + \dots + \frac{f_n L_n}{D_n^5} \right) \quad (2)$$

onde:

$H_f$  = perda de carga total (m)

$f_i$  = fator de atrito de Darcy-Weisbach em cada trecho (adimensional)

$L_i$  = comprimento de cada trecho (m)

$D_i$  = diâmetro de cada trecho (m)

$Q$  = vazão (m<sup>3</sup>/s)

$g$  = aceleração da gravidade local (m/s<sup>2</sup>)

$i = 0, 1, 2, 3, \dots n$  (o índice "zero" refere-se ao conduto no trecho de sucção)  
 $n =$  número de trechos em série no recalque.

Para cálculo do fator de atrito Swamee e Jain (1976) desenvolveram a seguinte expressão:

$$f = 0,25 \left[ \log_{10} \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{R_e^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (3)$$

O Número de Reynolds, por definição, é dado por:

$$R_e = \frac{4Q}{\pi Dv} \quad (4)$$

Substituindo a Eq. (4) na Eq. (3), e rearrumando, em cada trecho tem-se:

$$f_i = 0,25 \left[ \log_{10} \left( \frac{k_i}{3,7D_i} + 4,618 \left( \frac{D_i v}{Q} \right)^{0,9} \right) \right]^{-2} \quad (5)$$

com:

$k_i =$  rugosidade equivalente da parede do tubo de cada trecho (m)  
 $v =$  viscosidade cinemática do líquido em escoamento (m<sup>2</sup>/s)

Quanto ao bombeamento, se o líquido for água, a equação que relaciona a potência requerida no eixo da bomba com a vazão e a altura manométrica, é dada por:

$$P = \frac{QH_m}{0,075\eta} \quad (6)$$

onde,

$P =$  potência requerida pela bomba (CV)  
 $H_m =$  altura manométrica total na bomba (m)  
 $\eta =$  rendimento do conjunto motobomba (%) (neste texto sempre considerado conhecido).

A altura manométrica é dada por:

$$H_m = Z_2 - Z_1 + H_f \quad (7)$$

Então substituindo a Eq. (2) na Eq. (7) vem:

$$H_m = Z_2 - Z_1 + \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left( \frac{f_0 L_0}{D_0^5} + \frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \dots + \frac{f_n L_n}{D_n^5} \right) \quad (8)$$

onde:

$Z_1 =$  cota topográfica do nível do reservatório inferior (m)  
 $Z_2 =$  cota topográfica do nível do reservatório superior (m)

Finalmente, com  $f_0, f_1, f_2, \dots$  calculados com a Eq. (5) e substituindo a Eq. (8) na Eq. (6) e rearrumando, tem-se:

$$\frac{8Q^3}{g\pi^2} \left( \frac{f_0 L_0}{D_0^5} + \frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \dots + \frac{f_n L_n}{D_n^5} \right) + Q(Z_2 - Z_1) - 0,075 \cdot \eta \cdot P = 0 \quad (9)$$

Então, tem-se aqui deduzida uma equação para cálculo da vazão. Mas, como se vê, trata-se de uma equação implícita em  $Q$  e, portanto, não possui solução expressa de forma explícita. De um modo geral a solução de equações desta natureza envolve algum processo iterativo de aproximações sucessivas. O mais apropriado é utilizar o cálculo automatizado, por processo computacional, tal como faz a conhecida ferramenta "Atingir Meta" do Excel, que será utilizada no presente caso. A solução com esta ferramenta consiste basicamente em utilizar o primeiro membro da Eq. (9) como "função objetivo" cuja meta a se atingir é zero, fazendo variar  $Q$ . Portanto o valor de  $Q$  que tornar nulo o primeiro membro da Eq. (9) será a solução do problema. Então transportando a função objetivo com os dados do problema para a célula E6 do Excel, como mostra o exemplo apresentado a seguir, e partindo de um valor inicial de  $Q$ , digamos 0,1, a função Atingir Meta encontra imediatamente o valor final da vazão.

### PROBLEMA Nº 1:

Uma adutora recalca água através de um conduto constituído de três trechos em série, tendo cada trecho extensão e diâmetro interno, respectivamente, de 300 m e 0,30 m; 250 m e 0,25 m; e 150 m e 0,20 m. O trecho de sucção tem extensão de 6 m e diâmetro de 0,30 m. Todos os trechos possuem rugosidade equivalente de 0,00026 m e o desnível topográfico entre os reservatórios superior e inferior é de 25 m. Tendo a bomba 50 CV de potência, sob um rendimento de 71,68%, considere a viscosidade cinemática da água de 0,00000116 m<sup>2</sup>/s e calcule a vazão recalca.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>ASSOCIAÇÃO DE N CONDUTOS EM SÉRIE COM BOMBEAMENTO - FUNÇÃO ATINGIR META:</b>										
2	$L_0$ (m) =	6,00									
3	$L_1$ (m) =	300,00									
4	$L_2$ (m) =	250,00									
5	$L_3$ (m) =	150,00	Valor inicial da vazão (m <sup>3</sup> /s) =	0,1000							
6	$D_0$ (m) =	0,30	Função objeto =	0,0000							
7	$D_1$ (m) =	0,30	Vazão (m <sup>3</sup> /s) =	0,0786							
8	$D_2$ (m) =	0,25									
9	$D_3$ (m) =	0,20	E mais:								
10	$k_0$ (m) =	0,00026	Perda de carga total (m) =	9,20							
11	$k_1$ (m) =	0,00026	Altura manométrica total (m) =	34,20							
12	$k_2$ (m) =	0,00026									
13	$k_3$ (m) =	0,00026									
14	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s) =	0,00000116									
15	$g$ (m/s <sup>2</sup> ) =	9,806									
16	$\eta$ (%) =	0,7168									
17	$P$ (CV) =	50,00									
18	$Z_2 - Z_1$ (m) =	25,00									
19	$Q$ (m <sup>3</sup> /s) =	?									

A resposta, portanto, é  $Q = 0,0786$  m<sup>3</sup>/s. Além disso calculou-se também a perda de carga total e a altura manométrica total, a fim de que a análise possa ser feita também através destes parâmetros.

### 3 - Determinação do desnível entre os reservatórios quando conhecidos a potência e a vazão.

Com  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  obtidos com a Eq. (5), da Eq. (9) pode-se explicitar  $Z_2 - Z_1$  que dá como resultado:

$$Z_2 - Z_1 = \frac{0,075 \cdot \eta \cdot P}{Q} - \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left( \frac{f_0 L_0}{D_0^5} + \frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \dots + \frac{f_n L_n}{D_n^5} \right) \quad (10)$$

Sendo a Eq. (10) explícita sua solução envolve apenas operações matemáticas corriqueiras, bastando apenas transportá-la com os dados do problema para a célula E7 do Excel, como mostra o exemplo apresentado a seguir.

PROBLEMA Nº 2:

Uma adutora recalca água através de um conduto constituído de três trechos em série, sendo cada trecho com extensão e diâmetro interno, respectivamente, de 300 m e 0,30 m; 250 m e 0,25 m; e 150 m e 0,20 m. O trecho de sucção tem extensão de 6 m e diâmetro de 0,30 m. Todos os trechos possuem rugosidade equivalente de 0,00026 m e a vazão recalçada é de 0,0786 m<sup>3</sup>/s. Tendo a bomba 50 CV de potência, sob um rendimento de 71,68%, considere a viscosidade cinemática da água de 0,00000116m<sup>2</sup>/s e calcule o desnível entre os reservatórios superior e inferior.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>ASSOCIAÇÃO DE N CONDUTOS EM SÉRIE COM BOMBEAMENTO:</b>										
2	$L_0$ (m) =	6,00									
3	$L_1$ (m) =	300,00									
4	$L_2$ (m) =	250,00									
5	$L_3$ (m) =	150,00									
6	$D_0$ (m) =	0,30									
7	$D_1$ (m) =	0,30		Desnível geométrico (m) =	25,00						
8	$D_2$ (m) =	0,25									
9	$D_3$ (m) =	0,20		E mais:							
10	$\tilde{k}_0$ (m) =	0,00026		Perda de carga total (m) =	9,20						
11	$\tilde{k}_1$ (m) =	0,00026		Altura manométrica total (m) =	34,20						
12	$\tilde{k}_2$ (m) =	0,00026									
13	$\tilde{k}_3$ (m) =	0,00026									
14	$\nu$ (m <sup>2</sup> /s) =	0,00000116									
15	$g$ (m/s <sup>2</sup> ) =	9,806									
16	$\eta$ (%) =	0,7168									
17	$P$ (CV) =	50,00									
18	$Z_2 - Z_1$ (m) =	?									
19	$Q$ (m <sup>3</sup> /s) =	0,0786									

A resposta é  $Z_2 - Z_1 = 25,00$  m. Além disso calculou-se também a perda de carga total e a altura manométrica total, a fim de que a análise possa ser feita também através destes parâmetros.

**4 - Determinação da potência quando conhecidos a vazão e o desnível entre os reservatórios.**

Com  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  obtidos com a Eq. (5), da Eq. (9) pode-se explicitar  $P$  que dá como resultado:

$$P = \frac{Q(Z_2 - Z_1) + \frac{8Q^3}{g\pi^2} \left( \frac{f_0 L_0}{D_0^5} + \frac{f_1 L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2}{D_2^5} + \dots + \frac{f_n L_n}{D_n^5} \right)}{0,075\eta} \quad (11)$$

Sendo a Eq. (11) explícita sua solução envolve apenas operações matemáticas simples, bastando apenas transportá-la com os dados do problema para a célula E7 do Excel, como mostra o exemplo apresentado a seguir.

PROBLEMA Nº 3:

Uma adutora recalca água através de um conduto constituído de três trechos em série, sendo cada trecho com extensão e diâmetro interno, respectivamente, de 300 m e 0,30 m; 250 m e 0,25 m; e 150 m e 0,20 m. O trecho de sucção tem extensão de 6m e diâmetro de 0,30 m. Todos os trechos possuem rugosidade equivalente de 0,00026 m, o desnível topográfico entre os reservatórios superior e inferior é de 25 m e a vazão recalçada é de 0,0786 m<sup>3</sup>/s. Tendo o grupo motobomba um rendimento estimado de 71,68%, considere a viscosidade cinemática da água de 0,00000116 m<sup>2</sup>/s e calcule a potência absorvida pela bomba.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>ASSOCIAÇÃO DE N CONDUTOS EM SÉRIE COM BOMBEAMENTO:</b>										
2	$L_0$ (m) =	6,00									
3	$L_1$ (m) =	300,00									
4	$L_2$ (m) =	250,00									
5	$L_3$ (m) =	150,00									
6	$D_0$ (m) =	0,30									
7	$D_1$ (m) =	0,30	Potência da bomba (CV) =		50,00						
8	$D_2$ (m) =	0,25									
9	$D_3$ (m) =	0,20	E mais:								
10	$\hat{\kappa}_0$ (m) =	0,00026	Perda de carga total (m) =		9,20						
11	$\hat{\kappa}_1$ (m) =	0,00026	Altura manométrica total (m) =		34,20						
12	$\hat{\kappa}_2$ (m) =	0,00026									
13	$\hat{\kappa}_3$ (m) =	0,00026									
14	$v$ (m <sup>2</sup> /s) =	0,00000116									
15	$g$ (m/s <sup>2</sup> ) =	9,806									
16	$\eta$ (%) =	0,7168									
17	$P$ (CV) =	?									
18	$Z_2 - Z_1$ (m) =	25,00									
19	$Q$ (m <sup>3</sup> /s) =	0,0786									

A resposta é  $P = 50,00$  CV. Além disso calculou-se também a perda de carga total e a altura manométrica total, a fim de que a análise possa ser feita também através destes parâmetros.

### Bibliografia:

- 1 - Baptista, M. & Lara, M.; "Fundamentos de Engenharia Hidráulica". 4ª Edição, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2016.
- 2 - Camargo, L.A.; "Associação de N condutos em série em sistemas de bombeamento", Dez/2020. Disponível em <http://hidrotec.atspace.co.uk/bombeame.htm>. Acesso: Dez/2023.
- 3 - Moura, L.F.; "Excel para engenheiros", EdUFSCar, São Carlos, 2007.
- 4 - Swamee, P.K. e Jain, A.K.; "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems", Journal of the Hyd. Division, ASCE, p. 657-664, May, 1976.

LC, Vitória, Dez/2023.

### Apêndice.

As equações utilizadas no texto, convertidas para a notação do Excel, têm a seguinte forma:

Problema nº 1 – cálculo da vazão (célula E6):

$$=8*E7^3/(B15*PI()^2)*(B2/B6^5*0,25*(LOG10(B10/(3,7*B6)+4,618*(B6*B14/E7)^0,9))^2+B3/B7^5*0,25*(LOG10(B11/(3,7*B7)+4,618*(B7*B14/E7)^0,9))^2+B4/B8^5*0,25*(LOG10(B12/(3,7*B8)+4,618*(B8*B14/E7)^0,9))^2+B5/B9^5*0,25*(LOG10(B13/(3,7*B9)+4,618*(B9*B14/E7)^0,9))^2)+E7*B18-0,075*B16*B17$$

Problema nº 2 – cálculo do desnível entre reservatórios (célula E7):

$$=0,075*B16*B17/B19-8*B19^2/(B15*PI()^2)*(B2/B6^5*0,25*(LOG10(B10/(3,7*B6)+4,618*(B6*B14/B19)^0,9))^2+B3/B7^5*0,25*(LOG10(B11/(3,7*B7)+4,618*(B7*B14/B19)^0,9))^2+B4/B8^5*0,25*(LOG10(B12/(3,7*B8)+4,618*(B8*B14/B19)^0,9))^2+B5/B9^5*0,25*(LOG10(B13/(3,7*B9)+4,618*(B9*B14/B19)^0,9))^2)$$

Problema nº 3 – cálculo da potência (célula E7):

$$=(B19*B18+8*B19^3/(B15*PI()^2)*(B2/B6^5*0,25*(LOG10(B10/(3,7*B6)+4,618*(B6*B14/B19)^0,9))^2+B3/B7^5*0,25*(LOG10(B11/(3,7*B7)+4,618*(B7*B14/B19)^0,9))^2+B4/B8^5*0,25*(LOG10(B12/(3,7*B8)+4,618*(B8*B14/B19)^0,9))^2+B5/B9^5*0,25*(LOG10(B13/(3,7*B9)+4,618*(B9*B14/B19)^0,9))^2)/(0,075*B16)$$