Análise de escoamento em condutos forçados. Uso do Excel.

Eng° Luiz Camargo

O presente texto tem por objetivo rever alguns aspectos práticos que envolvem a análise do escoamento de fluidos incompressíveis em condutos forçados, uniformes e de seção circular, em regime permanente. Esta reunião de condições representa a maioria das situações com as quais uma boa parte dos projetistas de hidráulica se defronta no seu dia a dia. A análise é realizada com o emprego das equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White, fazendo uso da ferramenta "Atingir Meta" do Excel, e visa determinar a perda de carga, o diâmetro e a vazão.

É do entendimento geral em hidráulica e mecânica dos fluidos que conduto forçado é aquele no qual o fluido escoa à plena seção e sob pressão. Os condutos de seção circular também são chamados de tubos ou tubulações. Um conduto é dito uniforme quando a sua seção transversal não varia com o seu comprimento, e se a velocidade do fluido em qualquer seção do conduto não variar com o tempo, o regime de escoamento é dito permanente.

A densidade dos líquidos, ao contrário do que se passa com os gases, varia muito pouco quando se varia a sua pressão ou temperatura. A título de exemplo, considerando que a água tem compressibilidade igual a 5×10^{-5} cm^2/Kgf, isto significa que em condições normais seria necessário um incremento de pressão de 20 Kgf/cm^2 para que um litro de água se reduza de 1 cm^3, ou seja, para que sua densidade aumente um milésimo. Por isto, do ponto de vista prático, a densidade da água e de qualquer líquido é independente da temperatura e da pressão. Diante dessa reduzidíssima variação da densidade, nos escoamentos de líquidos em regime permanente considera-se que os mesmos se comportam como incompressíveis. Neste contexto se incluem querosene, gasolina, álcool, óleo diesel, água, vinho, vinhaça, leite, e muitos outros.

Como o objetivo deste texto trata de um tema da engenharia voltado à hidráulica de tubulações, e alguns de seus aspectos dimensionais, pode-se iniciá-lo apresentando em sua forma simplificada a equação da continuidade:

$$Q = AV \qquad (1)$$

onde:
Q = vazão no tubo (m^3/s)
A = $\pi D^2/4$ = área da seção transversal do tubo (m^2)
D = diâmetro interno do tubo (m)
V = velocidade do líquido no interior do tubo (m/s)

É conveniente ressaltar que um escoamento se classifica também como turbulento ou laminar. No escoamento laminar há um caminhamento disciplinado das partículas fluidas, seguindo trajetórias regulares, sendo que as trajetórias de duas partículas vizinhas não se cruzam. Já no escoamento turbulento a velocidade num dado ponto varia constantemente em grandeza e direção, com trajetórias irregulares, e podendo uma mesma partícula ora localizar-se próxima do eixo do tubo, ora próxima da parede do tubo. O critério para determinar se o escoamento é turbulento ou laminar, é a utilização do número de Reynolds:

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \qquad (2)$$

Substituindo a Eq. 1 na Eq. 2, o número de Reynolds assume a conveniente forma:

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D \nu} \qquad (3)$$

onde:

R_e = número de Reynolds (adimensional)
ν = viscosidade cinemática do líquido (m^2/s)

Nas condições normais de escoamento o número de Reynolds é interpretado conforme segue:

$R_e > 4000$, então o escoamento é turbulento.
$R_e < 2000$, então o escoamento é laminar.

Entre estes dois valores há a zona de transição, ou crítica, onde o escoamento pode ser laminar ou turbulento (Streeter e Wylie, 1985).

Em geral, como será tratado neste texto, o escoamento na condução de líquidos no interior de tubulações é turbulento, exceto em situações especiais, tais como escoamento a baixíssimas vazões, como ocorre em irrigação por gotejamento, onde o escoamento é laminar.

Sempre que um líquido escoa no interior de um tubo de um ponto para outro, haverá uma certa perda de energia, denominada perda de pressão ou perda de carga. Esta perda de energia é devido ao atrito com as paredes do tubo e devido à viscosidade do líquido em escoamento. Quanto maior for viscosidade do fluido e a rugosidade da parede da tubulação (a altura das asperezas), maior será a perda de carga.

Atualmente a expressão mais precisa e usada universalmente para análise de escoamento em tubos, que foi proposta em 1845, é a conhecida equação de Darcy-Weisbach:

$$h_f = \frac{8\,fLQ^2}{\pi^2 g D^5} \tag{4}$$

onde:

h_f = perda de carga ao longo do comprimento do tubo (mca)
f = fator de atrito (adimensional)
L = comprimento do tubo (m)
g = aceleração da gravidade local (m/s^2)

Após substituir valores e realizar operações na Eq. 4, ela assume também a conveniente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \sqrt{\frac{8Q^2}{\pi^2 g D^5 h_f / L}} \tag{5}$$

Para determinação do fator de atrito, Colebrook (1938/1939) estabeleceu a seguinte expressão conhecida como equação de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D} + \frac{2,51}{R_e\sqrt{f}}\right) \tag{6}$$

sendo k = rugosidade equivalente da parede do tubo (m).

Daí, substituindo-se as equações 3 e 5 na equação 6, com vistas a eliminar a variável f, e fazendo operações, tem-se:

$$\frac{2Q}{\pi\sqrt{2gD^5\,h_f/L}} = -\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D} + \frac{2,51\nu}{\sqrt{2gD^3\,h_f/L}}\right) \tag{7}$$

Na análise do escoamento de fluidos incompressíveis em condutos forçados, uniformes e de seção circular, em regime permanente, na prática cotidiana o projetista geralmente encontra problemas envolvendo três tipos de situações:

Tipo	Dados	Encontrar
1	Q, L, D, ν, k	h_f
2	h_f, L, Q, ν, k	D
3	h_f, L, D, ν, k	Q

Os exemplos a seguir ilustram bem o uso da Eq. 7 nos três tipos de situações.

Estudo de casos

Tipo 1:

Numa tubulação de 0,20 m de diâmetro, com comprimento de 100 m e rugosidade equivalente igual a 10^{-4} m, está escoando água à temperatura de 20 ºC ($\nu = 10^{-6}$ m²/s), com vazão de 62,8 litros/s. Pede-se a perda de carga.

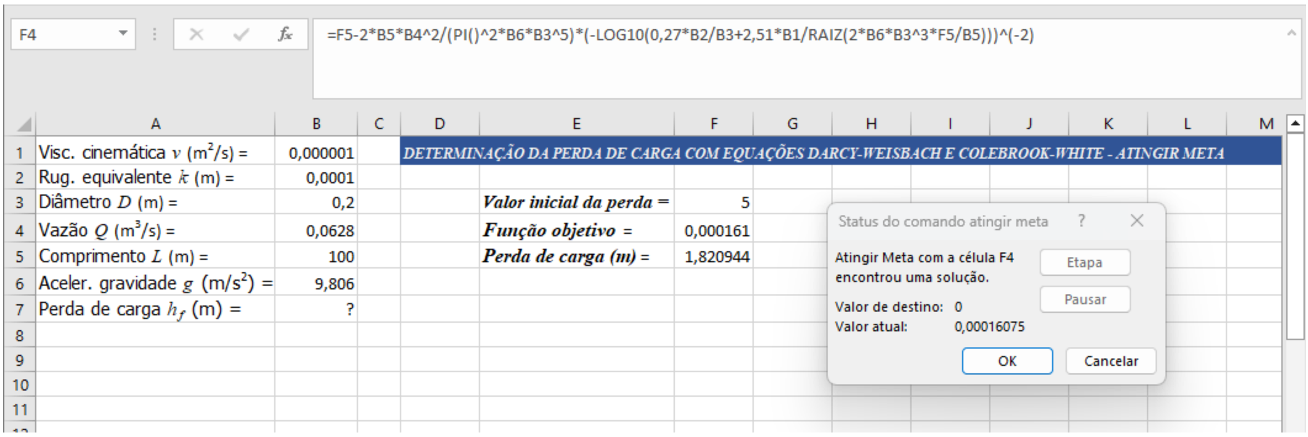
Dados do problema:

ν = 0,000001 m²/s
k = 0,0001 m
D = 0,20 m
Q = 0,0628 m³/s
L = 100 m
g = 9,806 m/s²

Para determinar a perda de carga, da Eq. 7 deduz-se:

$$h_f = \frac{2LQ^2}{\pi^2 g D^5}\left[-\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D}+\frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD^3\,h_f/L}}\right)\right]^{-2} \tag{8}$$

Como se vê, trata-se de uma equação implícita para h_f já que esta variável aparece nos dois membros da equação sem possibilidade de ser explicitada. A solução, portanto, requer o uso de algum método iterativo, tal como faz a conhecida ferramenta "Atingir Meta" do Excel, que será utilizada no presente caso. A solução com esta ferramenta consiste basicamente em passar o segundo membro da Eq. 8 para o primeiro membro, formando assim a "função objetivo" cuja meta a se atingir é zero, fazendo variar h_f. Então transportando a função objetivo e os dados do problema para a célula F4 do Excel, e partindo de um valor inicial de h_f, digamos 5, a função Atingir Meta encontra imediatamente o valor final da perda de carga, como mostra a solução do problema apresentado na imagem a seguir:



Portanto tem-se como resultado h_f = 1,820944 m.

Tipo 2:

Uma tubulação de ferro fundido com cimento centrifugado, comprimento 360 m, rugosidade equivalente de 10^{-4} m, conduz água à temperatura de 20 ºC ($\nu = 10^{-6}$ m²/s), com vazão de 12 m³/s e perda de carga total de 3,9 m. Pede-se determinar o diâmetro.

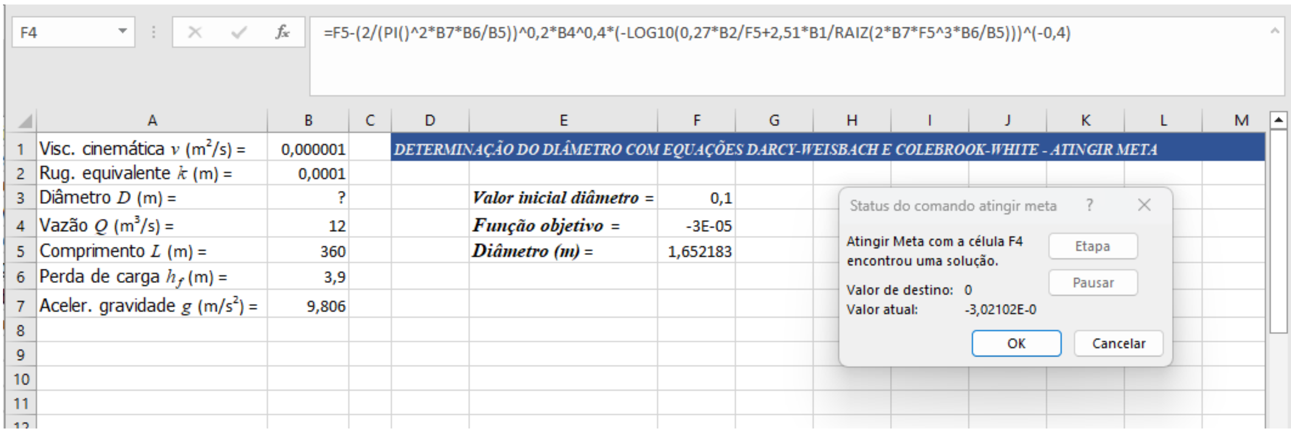
Dados do problema:

ν = 0,000001 m²/s
k = 0,0001 m
Q = 12 m³/s
h_f = 3,9 mca
L = 360 m
g = 9,81 m/s²

Para determinar o diâmetro, da Eq. 7 deduz-se:

$$D=\left(\frac{2}{\pi^2 g\, h_f/L}\right)^{0,2} Q^{0,4}\left[-\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D}+\frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD^3\, h_f/L}}\right)\right]^{-0,4} \tag{9}$$

Tal como no caso anterior, trata-se de uma equação implícita em D já que esta variável aparece nos dois membros da equação sem possibilidade de ser explicitada. Portanto a solução terá que vir de algum método iterativo, que é como atua a ferramenta "Atingir Meta" do Excel, que, como tal, será utilizada no presente caso. Como já dito, inicialmente passa-se o segundo membro da Eq. 9 para o primeiro, formando assim o que se chama "função objetivo", cuja meta a se atingir é zero, fazendo variar D. Então, transportando a função objetivo e os dados do problema para a célula F4 do Excel, e partindo de um valor inicial de D, digamos 0,1, a função Atingir Meta encontra imediatamente o valor final do diâmetro, como mostra a solução do problema apresentado na imagem a seguir:



Portanto tem-se como resultado D = 1,652183 m.

Tipo 3:

Uma tubulação de rugosidade k = 3,0.10⁻⁴ m, com 400 m de comprimento e diâmetro de 0,10 m, escoando água à temperatura de 37 ºC (ν = 7,0.10⁻⁷ m²/s), apresenta perda de carga total de 4,6 m. Pede-se a vazão.

Dados do problema:

ν = 0,0000007 m²/s
k = 0,0003 m
D = 0,10 m
h_f = 4,6
L = 400 m
g = 9,806 m/s²

Para determinar a vazão, da Eq. 7 deduz-se:

$$Q=-\frac{\pi}{2}\sqrt{2gD^5\, h_f/L}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{k}{D}+\frac{2,51\cdot\nu}{\sqrt{2gD^3\, h_f/L}}\right) \tag{10}$$

Como se vê, a Eq. 10 é explícita para Q e, portanto, o cálculo da vazão é imediato, sem necessidade do Excel, bastando apenas substituir os dados do problema:

$$Q = -\frac{\pi}{2}\sqrt{2\cdot 9,806\cdot 0,10^5\cdot 4,6/400}\cdot\log_{10}\left(0,27\frac{0,0003}{0,10}+\frac{2,51\cdot 0,0000007}{\sqrt{2\cdot 9,806\cdot 0,10^3\cdot 4,6/400}}\right)$$

Como resultado tem-se Q = 0,007155 m^3/s.

Bibliografia

1 - Baptista, M. & Lara, M.; "Fundamentos de Engenharia Hidráulica". 4ª Edição, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2016.
2 - Camargo, L.; "Análise de escoamento em condutos forçados. Uso das equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White". Vitória, Mai/2001. Disponível em http://hidrotec.atspace.co.uk/condufor.htm. Acesso: Nov/2023.
3 - Colebrook, C.F.; "Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipes". Journal of the Institution of Civil Engineers, vol. 11, p. 133-156, 1938/1939.
4 - Moura, L.F.; "Excel para engenheiros". EdUFSCar, São Carlos, 2007.
5 - Streeter, B.L. & Wylie, E.B.; "Fluid Mechanics". 8th Edition, McGraw-Hill, NY, 1985.

LC, Vitória, Nov/2023.